**Практично-лабораторне заняття №2.1**

**Багаторазові (багатократні) прямi вимірювання, різні за точністю**

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ

1). Визначити оцінку дійсного значення результатів спостережень кожної вибірки як середнє арифметичне значення (САЗ) випадкових величин ,:

(1)

де n – кількість спостережень в ряду (10…12), j - кількість вибірок.

2). Найти випадкові відхилення результатів спостереження від САЗ і квадрати випадкових відхилень:

, (2)

де *i* – результат у вибірці (10, 11 або 13 значень), *j* = 3 – кількість вибірок. Результати записати в Таблицю 2 і Таблицю 3.

Таблиця 2. Випадкові відхилення

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № виб. | ν1 | ν2 | ν3 | ν4 | ν5 | ν6 | ν7 | ν8 | ν9 | ν10 | ν11 | ν12 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таблиця 3. Квадрати випадкових відхилень

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № виб. | ν12 | ν22 | ν32 | ν42 | ν52 | ν62 | ν72 | ν82 | ν92 | ν102 | ν112 | ν122 |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

3). Визначити оцінку середнього квадратичного відхилення (СКВ) результатів спостережень S(R1), S(R2), S(R3):

*S(Rj) = +*  (3)

4) Перевірити вибірки на наявність грубих помилок (промахів) в кожній вибірці за критерієм Граббса.

За критерієм Граббса порівнюють співвідношення випадкової похибки максимального значення, поділене на СКВ, з допустимим значенням. Для цього необхідно взяти найбільше за значенням (по модулю) випадкове відхилення і розділити на значення СКВ відповідної вибірки, а потім порівняти з допустимим значенням , яке потрібно обрати із таблиці статистики Граббса (таблиця 4) у відповідності до рівня значимості *q* (визначається по заданій довірчій вірогідності *Рдов* , їх сума складає 1) та числа спостережень *nі* .

 (4)

***Якщо виявлено промах, то такий результат є недостовірним або помилковим, його треба вилучити з вибірки та повторити обрахування за п.п. 1) – 3). При цьому повторно перевіряти на наявність промахів не треба.***

5) Визначити оцінки дисперсії та СКВ результатів багатократних вимірювань :

(5)

6) Перевірити, якого характеру розбіжність мають САЗ вибірок – систематич-ну або випадкову – за Т-критерієм. Якщо різниця між найбільшим і найменьшим середніми арифметичними значеннями буде більше допустимого значення, то результати вибірок є неоднорідними і без уведення поправки на систематичну складову похибки об'єднуватися не можуть.

(6)

, (7)

де і – коефіцієнти Стьюдента, які обирають з таблиці статистики Стьюдента в залежності від значення довірчої вірогідності *Рдов* та числа ступенів свободи *k1* і *k2*,

і – дисперсії вибірок з максимальним і мінімальним САЗ.

При < максимальну розбіжність середніх значень визнають випадковою, систематичну складову – несуттєвою, а результати вимірювань по всіх вибірках можна об'єднати.

6) Перевірити САЗ вибірок на рівноточність.

Так як вибіркові значення в кожному ряду отримані за різними умовами, то потрібно перевірити вибірки на рівноточність (або підтвердити нерівноточ-ність). Для цього застосовують критерії Кохрена і Фішера, за якими оцінюють рівнорозсіюваність дисперсій результатів вимірювань.

6.1. Критерій Кохрена застосовують для більш ніж двох вибірок з рівною (або приблизно рівною) чисельністю випадкових спостережень у вибірках:

, (8)

де і – дисперсії вибірок з максимальним значенням САЗ і іншими.

порівнюють з – допустимим значенням із Таблиці 5.

6.2. Критерій Фішера дозволяє порівнювати вибірки різного об’єму попарно. За критерієм Фішера порівнюють дві вибірки (з найбільшою та найменшою за значеннями дисперсіями): в чисельник треба поставити більшу за значенням дисперсію, а в знаменник – меншу (із трьох обрахованих) і отриманий коефіцієнт порівняти з допустимим значенням коефіцієнта розподілення Фішера, обраним з Таблиці 6.

Якщо дисперсії будуть оцінені як рівні за характеристикою розсіювання, то оцінки САЗ будуть вважатися рівними за точністю.

(9)

***F*допуст** – коефіцієнт, який обирають із Таблиці 6 статистики розподілення Фішера Він залежить від заданого значення довірчої вірогідності *Рдов* тачисла ступенів свободи, які визначають як k1 = n1 – 1, k2 = n2 – 1, де кількість вибіркових значень n1 та n2 є характеристиками порівнювальних вибірок.

**При *F<F*допуст** чи ***G<G*допуст** дисперсії визнають як рівнорозсіяні, а результати вибірок – як рівні за точністю. Тому з метою отримання найдостовірного значення виміряної ФВ результати вибірок можна об’єднати як рівноточні.

Подальше опрацювання результатів вимірювань проводять за методикою прямих рівноточних вимірювань, тобто об’єднують достовірні результати вимі-рювань в одну вибірку і обраховують всі належні оцінки (САЗ, СКВ, ) для од- нієї вибірки розміром *(без урахування вилучених промахів)*.

**При *F>F*допуст** чи ***G<G*допуст** подальше опрацювання результатів проводять за методикою прямих нерівноточних (різних за точністю) вимірювань.

***НЕЗВАЖАЮЧИ НА ТЕ, ЯКЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ФІШЕРА ВИ ОТРИМАЛИ, ВВАЖАТИ РЕЗУЛЬТАТИ ВИМІРЮВАНЬ – РІЗНИМИ ЗА ТОЧНІСТЮ. Методика об’єднання результатів вимірювань, різних за точністю, викладена нижче.***

7) Визначити вагові коефіцієнти кожної вибірки *Р1*, *Р2 , Р3*:

(10)

Вагові коефіцієнти характеризують ступінь довіри до результатів вимірю-вань в вибірках. Чим більшим є значення Рj, тим більш достеменним є оцінка ряду вимірювань.

8) Обрахувати оцінку дійсного значення результату вимірювання опору як середнє зважене значення (СЗЗ) , яке буде найдостовірною і найвірогідною оцінкою дійсного значення опору за всіма результатами вимірювань:

(11)

9) Визначити оцінку середнього квадратичного відхилення середнього зваженого значення.

9.1. Якщо кількість вимірювань в вибірках є одинаковою

*S() =* + (12)

9.2. Якщо кількість вимірювань ni у вибірках є різною

, (13)

де - кількість вимірювань, а - ваговий коефіцієнт *j* – ї вибірки в

об’єднаній вибірці;

10) Розрахувати значення довірчого інтервалу результату вимірювання.

10.1. Якщо вимірювання об’єднаної вибірки розподілені за нормальним законом:

, (14)

де *tСт*  - коефіцієнт Стьюдента, який обирають за довірчою вірогідністю *Рдов* та числом ступенів свободи *K = N – m* із розподілення Стьюдента (Таблиця 7)*.*

10.2. Якщо вимірювання об'єднаної вибірки розподілені за невстановленим законом розподілення:

, (15)

де – коефіцієнт статистики Чебишева;

1. Записати результат вимірювання електричного опору у вигляді:

, *Рдов = ...; N =...* (16)

Таблиця 4 – Статистика розподілення Граббса (*tГр*)

Для варіантів із Pдов = 0,80 брати табличні значення для Pдов = 0,90.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Кількість  значень n | Рівень значимості ***q*** ***(q = 1-Pдов)*** | | | | |
| ***0,1*** | ***0,05*** | ***0,02*** | ***0,01*** | ***0,001*** |
| 3 | 1,148 | 1,153 | 1,155 | 1,155 | 1,155 |
| 4 | 1,425 | 1,463 | 1,481 | 1,492 | 1,499 |
| 5 | 1,602 | 1,672 | 1,715 | 1,749 | 1,780 |
| 6 | 1,729 | 1,822 | 1,887 | 1,944 | 2,011 |
| 7 | 1,828 | 1,938 | 2,020 | 2,097 | 2,201 |
| 8 | 1,909 | 2,032 | 2,126 | 2,221 | 2,358 |
| 9 | 1,977 | 2,110 | 2,215 | 2,323 | 2,492 |
| 10 | 2,036 | 2,176 | 2,290 | 2,410 | 2,606 |
| 11 | 2,088 | 2,234 | 2,355 | 2,485 | 2,705 |
| 12 | 2,134 | 2,285 | 2,412 | 2,550 | 2,791 |
| 13 | 2,175 | 2,331 | 2,462 | 2,607 | 2,867 |
| 14 | 2,213 | 2,371 | 2,507 | 2,659 | 2,935 |
| 15 | 2,247 | 2,409 | 2,549 | 2,705 | 2,997 |
| 16 | 2,279 | 2,443 | 2,585 | 2,747 | 3,052 |
| 17 | 2,309 | 2,475 | 2,620 | 2,785 | 3,103 |
| 18 | 2,335 | 2,504 | 2,651 | 2,821 | 3,149 |
| 19 | 2,361 | 2,532 | 2,681 | 2,854 | 3,191 |
| 20 | 2,385 | 2,557 | 2,709 | 2,884 | 3,230 |
| 21 | 2,408 | 2,580 | 2,733 | 2,912 | 3,266 |

Таблиця 5 – Статистика розподілення Кохрена ***Gдопуст***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***m*** | ***k*** для рівня значимості ***q = 0,05 (Рдов = 0,95)*** | | | | | | | | | |
| **4** | **4** | **5** | **6** | **7** | | **8** | **9** | **10** | **16** | **36** |
| **3** | 0,7457 | 0,7071 | 0,6771 | 0,6530 | | 0,6333 | 0,6167 | 0,6025 | 0,5466 | 0,4748 |
| **4** | 0,6287 | 0,5895 | 0,5598 | 0,5365 | | 0,5175 | 0,5017 | 0,4884 | 0,4366 | 0,3720 |
| **5** | 0,5441 | 0,5065 | 0,4783 | 0,4564 | | 0,4387 | 0,4241 | 0,4118 | 0,3645 | 0,3066 |
| **6** | 0,4803 | 0,4447 | 0,4184 | 0,3980 | | 0,3817 | 0,3682 | 0,3568 | 0,3135 | 0,2612 |
| **7** | 0,4307 | 0,3974 | 0,3726 | 0,3535 | | 0,3384 | 0,3259 | 0,3154 | 0,2756 | 0,2276 |
| **8** | 0,3910 | 0,3595 | 0,3362 | 0,3185 | | 0,3043 | 0,2956 | 0,2829 | 0,2462 | 0,2022 |
| ***m*** | ***k*** для рівня значимості ***q = 0,01 (Рдов = 0,99)*** | | | | | | | | | |
| **3** | 0,8335 | 0,7933 | 0,7606 | 0,7335 | 0,7107 | | 0,6912 | 0,6743 | 0,6059 | 0,5153 |
| **4** | 0,7212 | 0,6761 | 0,6410 | 0,6129 | 0,5897 | | 0,5702 | 0,5536 | 0,4884 | 0,4057 |
| **5** | 0,6329 | 0,5875 | 0,5531 | 0,5259 | 0,5037 | | 0,4854 | 0,4697 | 0,4094 | 0,3351 |
| **6** | 5635 | 5195 | 4866 | 4608 | 4401 | | 4229 | 4084 | 3529 | 2858 |
| **7** | 5080 | 4659 | 4347 | 4105 | 3911 | | 3751 | 3616 | 2105 | 2494 |
| **8** | 4627 | 4226 | 3932 | 3704 | 3522 | | 3373 | 3248 | 2779 | 2214 |

Таблиця 6. Статистика розподілення Фішера

За цією статистикою обирають ***Fдопуст*** по *Рдов*  та *k1*і *k2*:

*k1* – число ступенів свободи в першій вибірці, *k1 = n1 - 1*

*k2*– число ступенів свободи в другій вибірці, *k2 = n2 - 1*

Для варіантів із Pдов = 0,80 брати табличні значення для Pдов = 0,75.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***k2*** | ***Pдов*** | ***k1*** | | | | | | | |
| ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***10*** | ***11*** | ***12*** |
| ***5*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,89  3,45  5,05  11,0 | 1,89  3,40  4,95  10,7 | 1,89  3,37  4,88  10,5 | 1,89  3,34  4,82  10,3 | 1,89  3,32  4,77  10,2 | 1,89  3,30  4,74  10,1 | 1,89  3,28  4,71  9,96 | 1,89  3,27  4,68  9,98 |
| ***6*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,79  3,11  4,39  8,75 | 1,78  3,05  4,28  8,47 | 1,78  3,01  4,21  8,26 | 1,77  2,98  4,15  8,10 | 1,77  2,96  4,10  7,98 | 1,77  2,94  4,06  7,87 | 1,77  2,92  4,03  7,79 | 1,77  2,90  4,00  7,72 |
| ***7*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,71  2,88  3,97  7,46 | 1,71  2,83  3,87  7,19 | 1,70  2,78  3,79  6,99 | 1,70  2,75  3,73  6,84 | 1,69  2,72  3,68  6,72 | 1,69  2,70  3,64  6,62 | 1,69  2,68  3,60  6,54 | 1,68  2,67  3,57  6,47 |
| ***8*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,66  2,73  3,69  6,63 | 1,65  2,67  3,58  6,37 | 1,64  2,62  3,50  6,18 | 1,64  2,59  3,44  6,03 | 1,64  2,56  3,39  5,91 | 1,63  2,54  3,35  5,81 | 1,63  2,52  3,31  5,73 | 1,62  2,50  3,28  5,67 |
| ***9*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,62  2,61  3,48  6,06 | 1,61  2,55  3,37  5,80 | 1,60  2,51  3,29  5,61 | 1,60  2,47  3,23  5,47 | 1,59  2,44  3,18  5,35 | 1,59  2,42  3,14  5,26 | 1,58  2,40  3,10  5,18 | 1,58  2,38  3,07  5,11 |
| ***10*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,59  2,52  3,33  5,64 | 1,58  2,46  3,22  5,39 | 1,57  2,41  3,14  5,20 | 1,56  2,38  3,07  5,06 | 1,56  2,35  3,02  4,94 | 1,55  2,32  2,98  4,85 | 1,55  2,30  2,94  4,77 | 1,54  2,28  2,91  4,71 |
| ***11*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,56  2,45  3,20  5,32 | 1,55  2,39  3,09  5,07 | 1,54  2,34  3,01  4,89 | 1,53  2,30  2,95  4,74 | 1,53  2,27  2,90  4,63 | 1,52  2,25  2,85  4,54 | 1,52  2,23  2,82  4,46 | 1,51  2,21  2,79  4,40 |
| ***12*** | ***0,75***  ***0,90***  ***0,95***  ***0,99*** | 1,54  2,39  3,11  5,06 | 1,53  2,33  3,00  4,82 | 1,52  2,28  2,91  4,64 | 1,51  2,24  2,85  4,50 | 1,51  2,21  2,80  4,39 | 1,50  2,19  2,75  4,30 | 1,50  2,17  2,72  4,22 | 1,49  2,15  2,69  4,16 |

Таблиця 7 – Статистика розподілення Стьюдента (*tСт*)

Число ступенів свободи: *k = n – 1* (для рівноточних),

*k = N - m* (для нерівноточних).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***k/Pдов*** | ***0.80*** | ***0.90*** | ***0.95*** | ***0.98*** | ***0.99*** | ***0.995*** | ***0.999*** |
| ***1*** | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 127.32 | 636.62 |
| ***2*** | 1.89 | 2.92 | 4.30 | 6.93 | 9.53 | 14.09 | 31.60 |
| ***3*** | 1.64 | 2.35 | 3.18 | 4.54 | 5.84 | 7.45 | 12.94 |
| ***4*** | 1.53 | 2.13 | 2.78 | 3.75 | 4.60 | 5.60 | 8.61 |
| ***5*** | 1.48 | 2.02 | 2.57 | 3.37 | 4.03 | 4.77 | 6.86 |
| ***6*** | 1.44 | 1.94 | 2.45 | 3.14 | 3.71 | 4.32 | 5.96 |
| ***7*** | 1.42 | 1.90 | 2.37 | 3.00 | 3.50 | 4.03 | 5.41 |
| ***8*** | 1.40 | 1.86 | 2.31 | 2.90 | 3.36 | 3.83 | 5.04 |
| ***9*** | 1.38 | 1.83 | 2.26 | 2.82 | 3.25 | 3.69 | 4.78 |
| ***10*** | 1.37 | 1.81 | 2.23 | 2.76 | 3.17 | 3.58 | 4.59 |
| ***11*** | 1.36 | 1.80 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 3.50 | 4.44 |
| ***12*** | 1.36 | 1.78 | 2.18 | 2.68 | 3.06 | 3.43 | 4.32 |
| ***13*** | 1.35 | 1.77 | 2.16 | 2.65 | 3.01 | 3.37 | 4.22 |
| ***14*** | 1.34 | 1.76 | 2.15 | 2.62 | 2.98 | 3.33 | 4.14 |
| ***15*** | 1.34 | 1.75 | 2.13 | 2.60 | 2.95 | 3.29 | 4.07 |
| ***16*** | 1.34 | 1.75 | 2.12 | 2.58 | 2.92 | 3.25 | 4.02 |
| ***17*** | 1.33 | 1.74 | *2.*11 | 2.57 | 2.90 | 3.22 | 3.97 |
| ***18*** | 1.33 | 1.73 | 2.10 | 2.55 | 2.88 | 3.20 | 3.92 |
| ***19*** | 1.33 | 1.73 | 2.09 | 2.54 | 2.86 | 3.17 | 3.88 |
| ***20*** | 1.33 | 1.73 | 2.09 | 2.53 | 2.85 | 3.15 | 3.85 |
| ***21*** | 1.32 | 1.72 | 2.08 | 2.52 | 2.83 | 3.14 | 3.82 |
| ***22*** | 1.32 | 1.72 | 2.07 | 2.51 | 2.82 | 3.12 | 3.79 |
| ***23*** | 1.32 | 1.71 | 2.07 | 2.50 | 2.81 | 3.10 | 3.77 |
| ***24*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.80 | 3.09 | 3.75 |
| ***25*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.79 | 3.08 | 3.73 |
| ***26*** | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.78 | 3.07 | 3.71 |
| ***27*** | 1.31 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.77 | 3.06 | 3.69 |
| ***28*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.76 | 3.05 | 3.67 |
| ***29*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.76 | 3.04 | 3.66 |
| ***30*** | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.75 | 3.03 | 3.65 |

**Задачі для самостійної роботи**

**Гр. 310, 311, 312**

**Задача**. При визначенні електрорушійної сили (ЕРС) нормального елемента було отримано 3 вибірки випадкових спостережень: n1 = 12, n2 = 14 та n3 = 13 та розраховані оцінки дійсних значень та СКВ результатів постережень, відповідно

Перевірити оцінки вибірок на однорідність і рівноточність за критеріями Кохрена і Фішера. Оцінити результат вимірювання ЕРС з довірчою вірогідністю Рдов = 0,95 для нормального розподілення і розподілення з невідомим законом.

**Гр. 318**

**Задача**. За допомогою чотирьох частотомірів різного типу виконано 25, 23, 23 і 24 вимірювань частоти певного значення. При опрацюванні результатів отримано оцінки дійсних значень та СКВ результатів спостережень, відповідно:

Перевірити оцінки вибірок на однорідність і рівноточність за критеріями Кохрена і Фішера. Оцінити результат вимірювання частоти з довірчою вірогідністю 90% для нормального розподілення і розподілення з невідомим законом.

**Гр. 319**

**Задача.** Виміряно дві вибірки вимірювань опору резистора, відповідно з 10 та 12 значень. При опрацюванні результатів отримали оцінки дійсних значень і СКВ випадкових спостережень відповідно :

Перевірити оцінки вибірок на однорідність і рівноточність за критерієм Фішера. Оцінити результат вимірювання частоти з довірчою вірогідністю 99% для нормального розподілення і розподілення з невідомим законом.