

Maxwell's equations

Electric field

Magnetic field

Maxwell's 2-2 equations

magnetic field

Комплексна форма рівнянь Максвелла

Семен ЖИЛА

Використання символічного методу

Maxwell's equations

Electric field



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{e^{j\alpha}\} &= \cos(\alpha) \\ \operatorname{Im}\{e^{j\alpha}\} &= \sin(\alpha) \\ e^{j\alpha} &= \underbrace{\cos(\alpha)}_{\operatorname{Re}} + j \underbrace{\sin(\alpha)}_{\operatorname{Im}} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$e^{-j\alpha} \cdot e^{-j\beta} = e^{-j(\alpha + \beta)}$$

частота, $\omega_0 = \frac{1}{T}$

$$u(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{амплітуда}} \cdot \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{фаза}})$$

$$\begin{aligned} u(t) &= A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re}\{A(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\operatorname{Re}} + j \underbrace{\sin(\alpha)}_{\operatorname{Im}}\} = \operatorname{Re}\{A(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\varphi}\} = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re}\{\underbrace{\dot{A}(t)} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 t}}\}, \text{ де } \dot{A}(t) = A(t) \cdot e^{j\varphi}$$

Використання символічного методу



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{e^{j\alpha}\} &= \cos(\alpha) \\ \operatorname{Im}\{e^{j\alpha}\} &= \sin(\alpha) \\ e^{j\alpha} &= \underbrace{\cos(\alpha)}_{\operatorname{Re}} + j \underbrace{\sin(\alpha)}_{\operatorname{Im}} \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$e^{-j\alpha} \cdot e^{-j\beta} = e^{-j(\alpha + \beta)}$$

$$u(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{амплітуда}} \cdot \cos(\underbrace{\omega_0 t + \varphi}_{\text{фаза, } \omega_0 = \frac{1}{T}})$$

$$\begin{aligned} u(t) &= A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re}\{A(t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\operatorname{Re}} + j \underbrace{\sin(\alpha)}_{\operatorname{Im}}\} = \operatorname{Re}\{A(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\varphi}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{\dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\}, \text{ де } \dot{A}(t) = A(t) \cdot e^{j\varphi} \end{aligned}$$

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re}\{\dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\dot{u}(t) = \dot{A}(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Використання символічного методу

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \Rightarrow \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{E}}_0(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y, z, t) \Rightarrow \dot{\vec{H}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{H}}_0(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial [\dot{\vec{E}}_0(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}]}{\partial t} = \dot{\vec{E}}_0(\vec{r}) \cdot \frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t} =$$

$$= \dot{\vec{E}}_0(\vec{r}) \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E} = \rho \\ \text{div } \mu_a \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} = \vec{j}_0 \cdot e^{j\omega t} + j\omega \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{rot } \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} = -j\omega \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} = \vec{\rho}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}_0 = \vec{j}_0 + j\omega \epsilon_a \vec{E}_0 \\ \text{rot } \vec{E}_0 = -j\omega \mu_a \vec{H}_0 \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 = \vec{\rho}_0 \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 = 0 \end{array} \right.$$

Комплексна діелектрична проникність



$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E} &= \rho \\ \text{div } \mu_a \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} &= \vec{j}_0 \cdot e^{j\omega t} + j\omega \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{rot } \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} &= -j\omega \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t} &= \vec{j}_0 \cdot e^{j\omega t} \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega t} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_0 &= \vec{j}_0 + j\omega \epsilon_a \vec{E}_0 \\ \text{rot } \vec{E}_0 &= -j\omega \mu_a \vec{H}_0 \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 &= \vec{j}_0 \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_0 &= g \vec{E}_0 \\ \text{rot } \vec{H}_0 &= g \cdot \vec{E}_0 + j\omega \epsilon_a \vec{E}_0 = \\ &= (g + j\omega \epsilon_a) \vec{E}_0 = \\ &= \left(\frac{g}{j\omega} + \epsilon_a \right) \cdot j\omega \vec{E}_0 = \\ &= \left(\frac{jg}{j^2 \omega} + \epsilon_a \right) j\omega \vec{E}_0 = \end{aligned}$$

Комплексна діелектрична проникність



$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E} = \rho \\ \text{div } \mu_a \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{rot } \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} = \vec{j}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} + j\omega_0 \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \\ \text{rot } \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} = -j\omega_0 \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} = \vec{\rho}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} = 0 \end{cases}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}_0 = \vec{j}_0 + j\omega_0 \epsilon_a \vec{E}_0 \\ \text{rot } \vec{E}_0 = -j\omega_0 \mu_a \vec{H}_0 \\ \text{div } \epsilon_a \vec{E}_0 = \vec{\rho}_0 \\ \text{div } \mu_a \vec{H}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_0 &= g \vec{E}_0 \\ \text{rot } \vec{H}_0 &= g \cdot \vec{E}_0 + j\omega_0 \epsilon_a \vec{E}_0 = \\ &= (g + j\omega_0 \epsilon_a) \vec{E}_0 = \\ &= \left(\frac{g}{j\omega_0} + \epsilon_a \right) \cdot j\omega_0 \vec{E}_0 = \\ &= \left(\frac{jg}{j^2 \omega_0} + \epsilon_a \right) j\omega_0 \vec{E}_0 = | j^2 = -1 | = \end{aligned}$$

$$\epsilon_a = \epsilon_a - j \frac{g}{\omega_0}$$

$$= \left(\frac{jg}{-1 \cdot \omega_0} + \epsilon_a \right) j\omega_0 \vec{E}_0 = \underbrace{\left(\epsilon_a - j \frac{g}{\omega_0} \right)}_{\epsilon_a} \cdot j\omega_0 \vec{E}_0$$

Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H}_0 = j\omega_0 \epsilon_a \vec{E}_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E}_0 = \underline{\underline{-j\omega_0 \mu_a \vec{H}_0}} \\ \operatorname{div} \epsilon_a \vec{E}_0 = \vec{J}_0 \\ \operatorname{div} \mu_a \vec{H}_0 = 0 \end{array} \right.$$

Добуток функцій у комплексній формі



$$A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_A) \cdot B(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_B) =$$

$$= A(t) \cdot B(t) \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \omega_0 t + \varphi_A + \varphi_B) + A(t) B(t) \cdot \frac{1}{2} \times$$
$$\times \cos(\omega_0 t - \omega_0 t + \varphi_A - \varphi_B) = \frac{A(t) B(t)}{2} \cos(2\omega_0 t + \varphi_A + \varphi_B) +$$
$$+ \frac{A(t) B(t)}{2} \cos(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$A(t) = \operatorname{Re}(\dot{A}_0 e^{j\omega_0 t}) \quad B(t) = \operatorname{Re}(\dot{B}_0 e^{j\omega_0 t})$$

$$A(t) \cdot B(t) = \operatorname{Re}\{\dot{A}_0 e^{j\omega_0 t}\} \cdot \operatorname{Re}\{\dot{B}_0 e^{j\omega_0 t}\}, \quad \operatorname{Re} \dot{A} \cdot \operatorname{Re} \dot{B} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B}^*$$

Добуток функцій у комплексній формі



$$\begin{aligned} A(t) \cdot B(t) &= \operatorname{Re}\{ \dot{A}_0 e^{j\omega_0 t} \} \operatorname{Re}\{ \dot{B}_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ \dot{A}_0 \cdot \dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t} \} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \cancel{e^{j\omega_0 t}} \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ \dot{A}_0 \dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t} \} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \} \end{aligned}$$

$$C(t) = \operatorname{Re}\{ \dot{c}(t) \} = \frac{\dot{c}(t) + \dot{c}^*(t)}{2}$$

Середнє значення добутка функцій у комплексній формі



$$f_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$f_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$$

$$[A(t) B(t)]_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) \cdot B(t) dt$$

$$[A(t) \cdot B(t)]_{cp} = \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \dot{A} \dot{B} + \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B}^*] dt =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \{ \dot{A}_0 \dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t} \} + \operatorname{Re} \{ \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \}] dt =$$

Середнє значення добутка функцій у комплексній формі



$$f_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

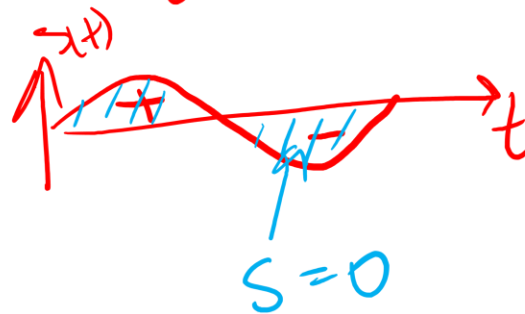
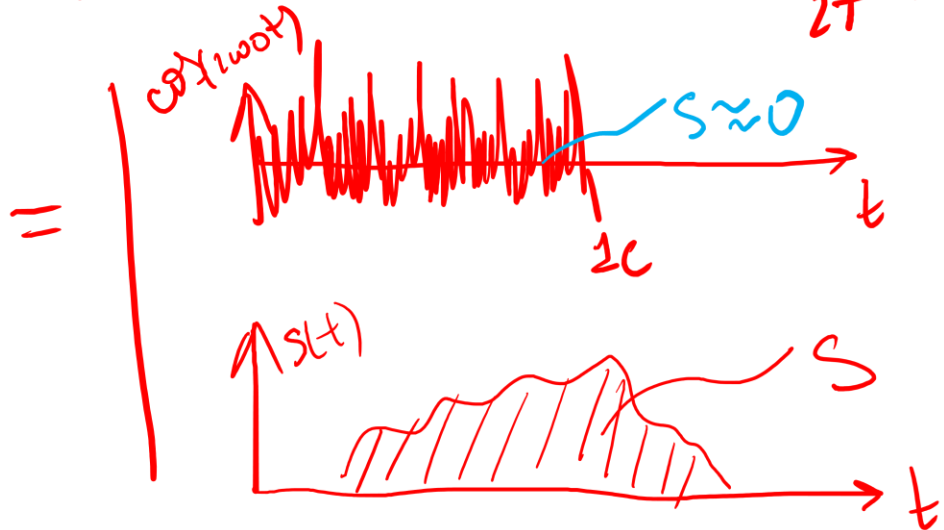
$$f_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$$

$$[A(t) B(t)]_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) \cdot B(t) dt$$

$$[A(t) \cdot B(t)]_{cp} = \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \dot{A} \dot{B} + \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B}^*] dt =$$

$$= \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \{ \dot{A}_0 \dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t} \} + \operatorname{Re} \{ \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \}] dt =$$

$$\frac{1}{2T} \dot{A}_0 \dot{B}_0 \int_0^T \cos(2\omega_0 t + \varphi_A + \varphi_B) dt + \frac{1}{2T} \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \int_0^T dt \quad (\approx 0)$$



$$\approx \frac{\operatorname{Re} \dot{A}_0 \dot{B}_0^*}{2}$$

Середнє значення добутка функцій у комплексній формі



$$W_{E_{cp}} = \frac{1}{4} \epsilon_a E_0^2$$

$$W_{H_{cp}} = \frac{1}{4} \mu_a H_0^2$$

$$\vec{P}_{cp} = (\vec{E} \times \vec{H})_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}_0 \times H_0^*)$$

1. У чому полягає сенс використання символічного методу для опису монохроматичних коливань?
2. Які вирази входять до системи рівнянь Максвелла в комплексній формі?
3. Наведіть вирази, що визначають математичний зв'язок між комплексними формами функцій та їх дійсними значеннями.



Дякую за увагу!