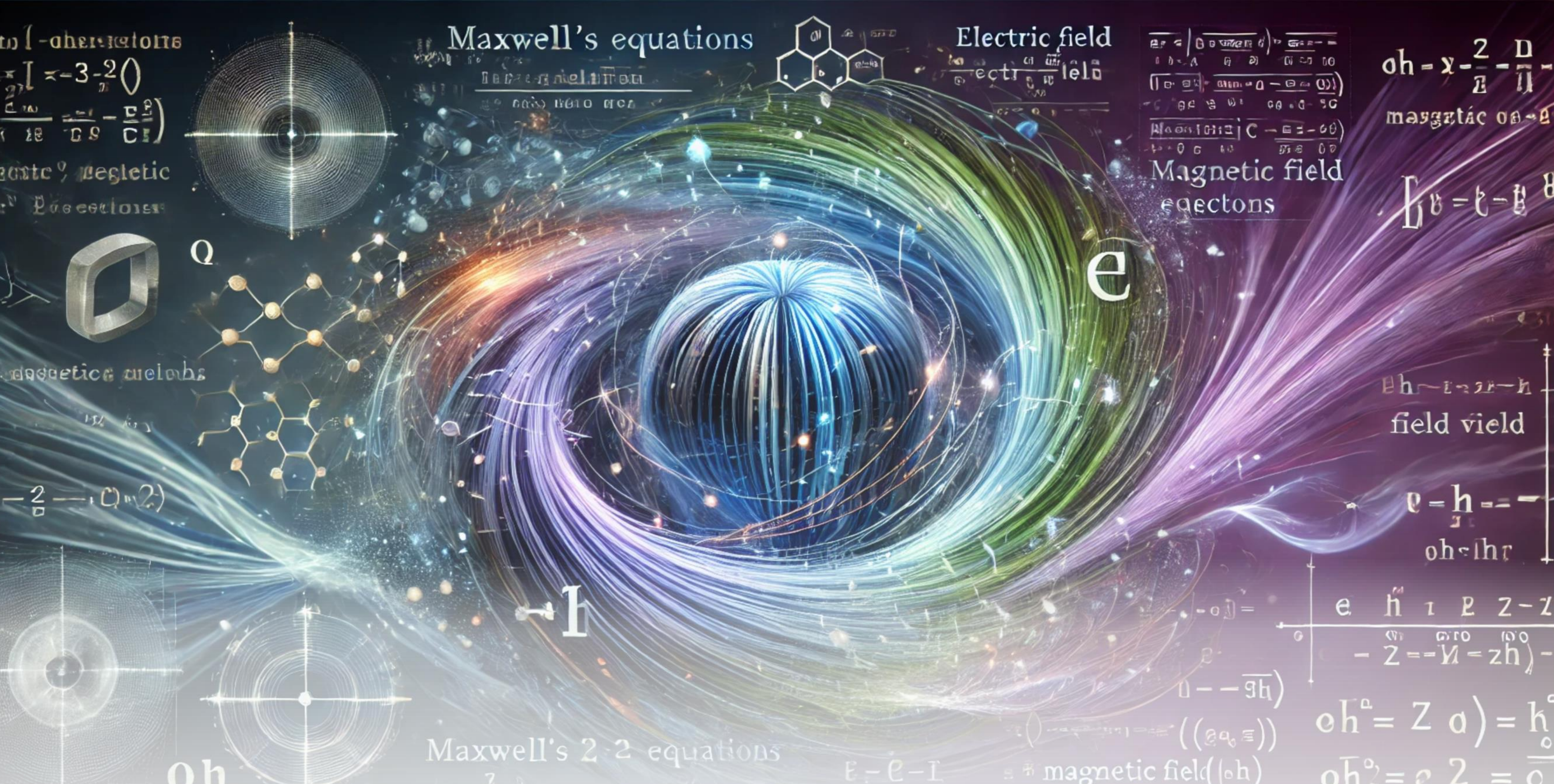


Комплексна форма рівнянь Максвелла

Семен ЖИЛА

Використання символічного методу

$$\mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\} = \cos(\alpha)$$

$$\mathrm{Im}\{e^{j\alpha}\} = \sin(\alpha)$$

$$e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\mathrm{Re}} + j\underbrace{\sin(\alpha)}_{\mathrm{Im}}$$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$e^{-j\alpha}\cdot e^{-j\beta} = e^{-j(\alpha+\beta)}$$

частота, $\omega_0 = \frac{1}{T}$

$$u(t) = A(t)\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

амплітуда

фаза

$$u(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{Re}\{A(t)\cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} =$$

$$= \left| e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\mathrm{Re}} + j\underbrace{\sin(\alpha)}_{\mathrm{Im}} \right| = \mathrm{Re}\{A(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\varphi}\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{\dot{A}(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\},\ \text{де}\ \dot{A}(t) = A(t)\cdot e^{j\varphi}$$

Використання символічного методу

$Re\{e^{j\alpha}\} = \cos(\alpha)$

$Im\{e^{j\alpha}\} = \sin(\alpha)$

$e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{Re} + j\underbrace{\sin(\alpha)}_{Im}$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$e^{-j\alpha}\cdot e^{-j\beta} = e^{-j(\alpha+\beta)}$$

частота, $\omega_0 = \frac{1}{T}$

$$u(t) = A(t)\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

амплітуда

фаза

$$u(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = Re\{A(t)\cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} =$$

$$= \left| e^{j\alpha} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{Re} + j\underbrace{\sin(\alpha)}_{Im} \right| = Re\{A(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\varphi}\} =$$

$$= Re\{\underline{\dot{A}(t)}\cdot \underline{e^{j\omega_0 t}}\}, \text{ де } \dot{A}(t) = A(t)\cdot e^{j\varphi}$$

$$u(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = Re\{\dot{A}(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\dot{u}(t) = \dot{A}(t)\cdot e^{j\omega_0 t}$$

Використання символічного методу

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y,z,t) \Rightarrow \dot{\vec{E}}(\vec{r},t) = \dot{\vec{E}}_0(\vec{r})\cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y,z,t) \Rightarrow \dot{\vec{H}}(\vec{r},t) = \dot{\vec{H}}_0(\vec{r})\cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\dot{\vec{j}} = \dot{\vec{j}}_0 \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}}_0 \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[\dot{\vec{E}}_0(\vec{r})\cdot e^{j\omega_0 t}\right]}{\partial t} = \dot{\vec{E}}_0(\vec{r})\cdot \frac{\partial e^{j\omega_0 t}}{\partial t} =$$

$$= \dot{\vec{E}}_0(\vec{r})\cdot j\omega_0 \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\varepsilon_a \vec{E} = \rho \\
\operatorname{div}\mu_a \vec{H} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{j}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\
\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\
\operatorname{div}\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{\rho}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\
\operatorname{div}\mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{j}}_0 + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \\
\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}_0 = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \\
\operatorname{div}\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{\rho}}_0 \\
\operatorname{div}\mu_a \dot{\vec{H}}_0 = 0
\end{cases}
$$

Комплексна діелектрична проникність

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} = \rho \\ \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{j}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} + j\omega_0 \cdot \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = -j\omega_0 \cdot \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{\rho}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \operatorname{div} \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{j}}_0 + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_0 = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{\rho}}_0 \\ \operatorname{div} \mu_a \dot{\vec{H}}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\vec{j}}_0 = g \dot{\vec{E}}_0$$

$$\longrightarrow \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_0 = g \cdot \dot{\vec{E}}_0 + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 =$$

$$= (g + j\omega_0 \varepsilon_a) \dot{\vec{E}}_0 =$$

$$= \left(\frac{g}{j\omega_0} \cdot \frac{j}{j} + \varepsilon_a\right) \cdot j\omega_0 \dot{E}_0 =$$

$$= \left(\frac{jg}{j^2 \omega_0} + \varepsilon_a\right) j\omega_0 \dot{E}_0 =$$

Комплексна діелектрична проникність

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\varepsilon_a \vec{E} = \rho \\ \mathrm{div}\,\mu_a \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{j}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \mathrm{div}\,\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \cancel{e^{j\omega_0 t}} = \dot{\vec{\rho}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} \\ \mathrm{div}\,\mu_a \dot{\vec{H}}_0 \cdot \cancel{e^{j\omega_0 t}} = 0 \end{cases}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{j}}_0 + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 \\ \mathrm{rot}\,\dot{\vec{E}}_0 = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \\ \mathrm{div}\,\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{\rho}}_0 \\ \mathrm{div}\,\mu_a \dot{\vec{H}}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\vec{j}}_0 = g\,\dot{\vec{E}}_0$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}}_0 = g \cdot \dot{\vec{E}}_0 + j\omega_0 \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 =$$

$$= (g + j\omega_0 \varepsilon_a)\,\dot{\vec{E}}_0 =$$

$$= \left(\frac{g}{j\omega_0} \cdot \frac{j}{j} + \varepsilon_a\right) \cdot j\omega_0 \dot{\vec{E}}_0 =$$

$$= \left(\frac{jg}{j^2 \omega_0} + \varepsilon_a\right) j\omega_0 \dot{\vec{E}}_0 = \left| j^2 = -1 \right| =$$

$$= \left(\frac{jg}{-1 \cdot \omega_0} + \varepsilon_a\right) j\omega_0 \dot{\vec{E}}_0 = \underbrace{\left(\varepsilon_a - j\frac{g}{\omega_0}\right)}_{\dot{\varepsilon}_a} \cdot j\omega_0 \dot{\vec{E}}_0$$

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\frac{g}{\omega_0}$$

Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі

$$
\begin{cases}
\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_0 = j\omega_0 \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_0 \\
\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_0 = -j\omega_0 \mu_a \dot{\vec{H}}_0 \\
\operatorname{div} \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{\rho}}_0 \\
\operatorname{div} \mu_a \dot{\vec{H}}_0 = 0
\end{cases}
$$

Добуток функцій у комплексній формі

$$A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_A)\cdot B(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_B)=$$

$$=A(t)\cdot B(t)\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t+\omega_0 t+\varphi_A+\varphi_B)+A(t)B(t)\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times\cos(\cancel{\omega_0 t}-\cancel{\omega_0 t}+\varphi_A-\varphi_B)=\frac{A(t)B(t)}{2}\cos(2\omega_0 t+\varphi_A+\varphi_B)+$$

$$+\frac{A(t)B(t)}{2}\cos(\varphi_A-\varphi_B)$$

$$A(t)=\mathrm{Re}(\dot{A}_0 e^{j\omega_0 t})\qquad B(t)=\mathrm{Re}(\dot{B}_0 e^{j\omega_0 t})$$

$$A(t)\cdot B(t)=\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 e^{j\omega_0 t}\}\cdot\mathrm{Re}\{\dot{B}_0 e^{j\omega_0 t}\},\quad \boxed{\mathrm{Re}\,\dot{A}\cdot\mathrm{Re}\,\dot{B}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B}^*}$$

Добуток функцій у комплексній формі

$$A(t)\cdot B(t) = \mathrm{Re}\{\dot{A}_0 e^{j\omega_0 t}\}\,\mathrm{Re}\{\dot{B}_0 \cdot e^{j\omega_0 t}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 \cdot \dot{B}_0\, e^{j2\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 \dot{B}_0^* \cancel{e^{j\omega_0 t}} \cdot \cancel{e^{-j\omega_0 t}}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 \dot{B}_0\, e^{j2\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 \dot{B}_0^*\}$$

$$C(t) = \boxed{\mathrm{Re}\{\dot{C}(t)\} = \frac{\dot{C}(t) + \dot{C}^*(t)}{2}}$$

Середнє значення добутка функцій у комплексній формі

$$f_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$f_{cp} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$\left[A(t)\,B(t)\right]_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\cdot B(t)\,dt$$

$$\left[A(t)\cdot B(t)\right]_{cp} = \frac{1}{2T}\int_0^T \left[\mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B} + \mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B}^*\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left[\mathrm{Re}\{\dot{A}_0 \dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t}\} + \mathrm{R}\{\dot{A}_0 \dot{B}_0^*\}\right]dt =$$

Середнє значення добутка функцій у комплексній формі

$$f_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$f_{cp} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$$

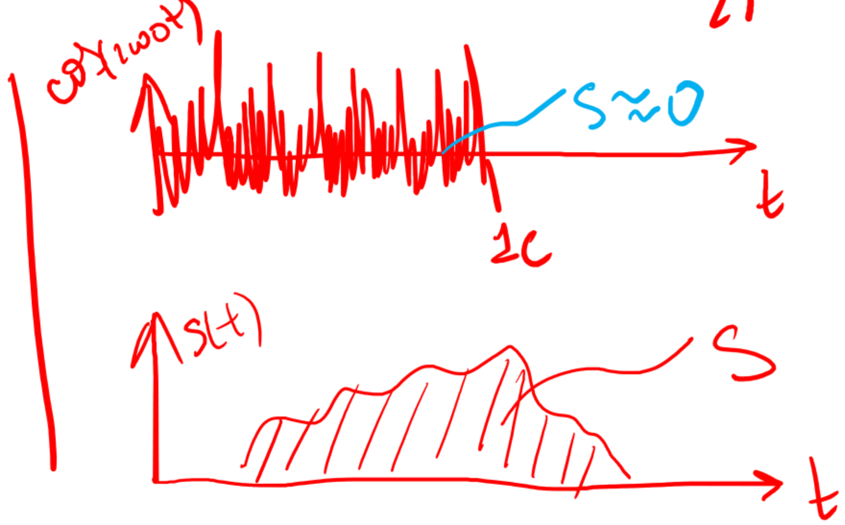
$$\left[A(t)\,B(t)\right]_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\cdot B(t)\,dt$$

$$\left[A(t)\cdot B(t)\right]_{cp} = \frac{1}{2T}\int_0^T \left[\mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B} + \mathrm{Re}\,\dot{A}\dot{B}^*\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T \left[\mathrm{Re}\{\dot{A}_0\dot{B}_0 e^{j2\omega_0 t}\} + \mathrm{R}\{\dot{A}_0\dot{B}_0^*\}\right]dt =$$

$$\overbrace{\frac{1}{2T}\dot{A}_0\dot{B}_0\int_0^T \cos(2\omega_0 t + \varphi_A + \varphi_B)\,dt}^{\approx 0} + \underbrace{\frac{1}{2T}\dot{A}_0\dot{B}_0^*\int_0^T dt}$$

$$\approx \frac{\mathrm{Re}\,\dot{A}_0\dot{B}_0^*}{2}$$



Середнє значення добутка функцій у комплексній формі

$$W_{E\,ср} = \frac{1}{4}\varepsilon_a E_0^2$$

$$W_{H\,ср} = \frac{1}{4}\mu_a \dot{H}_0^2$$

$$\vec{\Pi}_{ср} = (\vec{E}\times\vec{H})_{ср} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}_0\times\dot{H}_0^*\right)$$

Контрольні запитання

1. У чому полягає сенс використання символічного методу для опису монохроматичних коливань?

2. Які вирази входять до системи рівнянь Максвелла в комплексній формі?

3. Наведіть вирази, що визначають математичний зв’язок між комплексними формами функцій та їх дійсними значеннями.

Дякую за увагу!