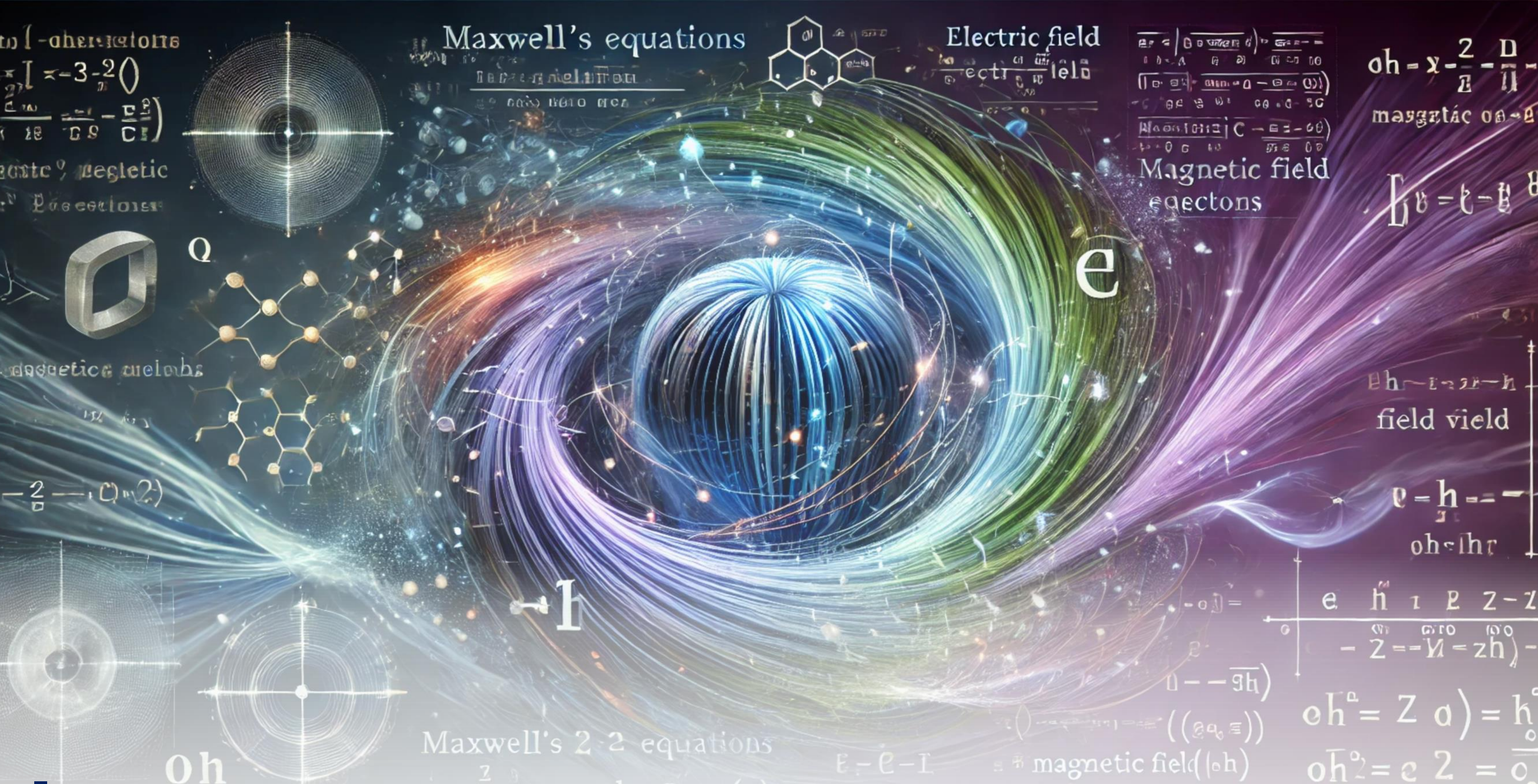


Поняття ротора та теорема Стокса

Семен ЖИЛА

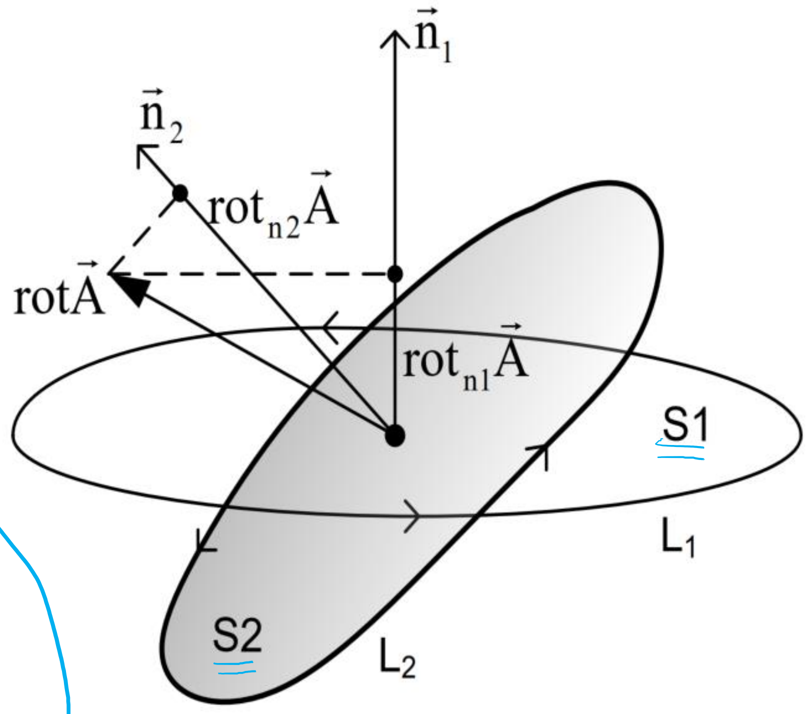
Визначення поняття векторного ротора

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = I$$

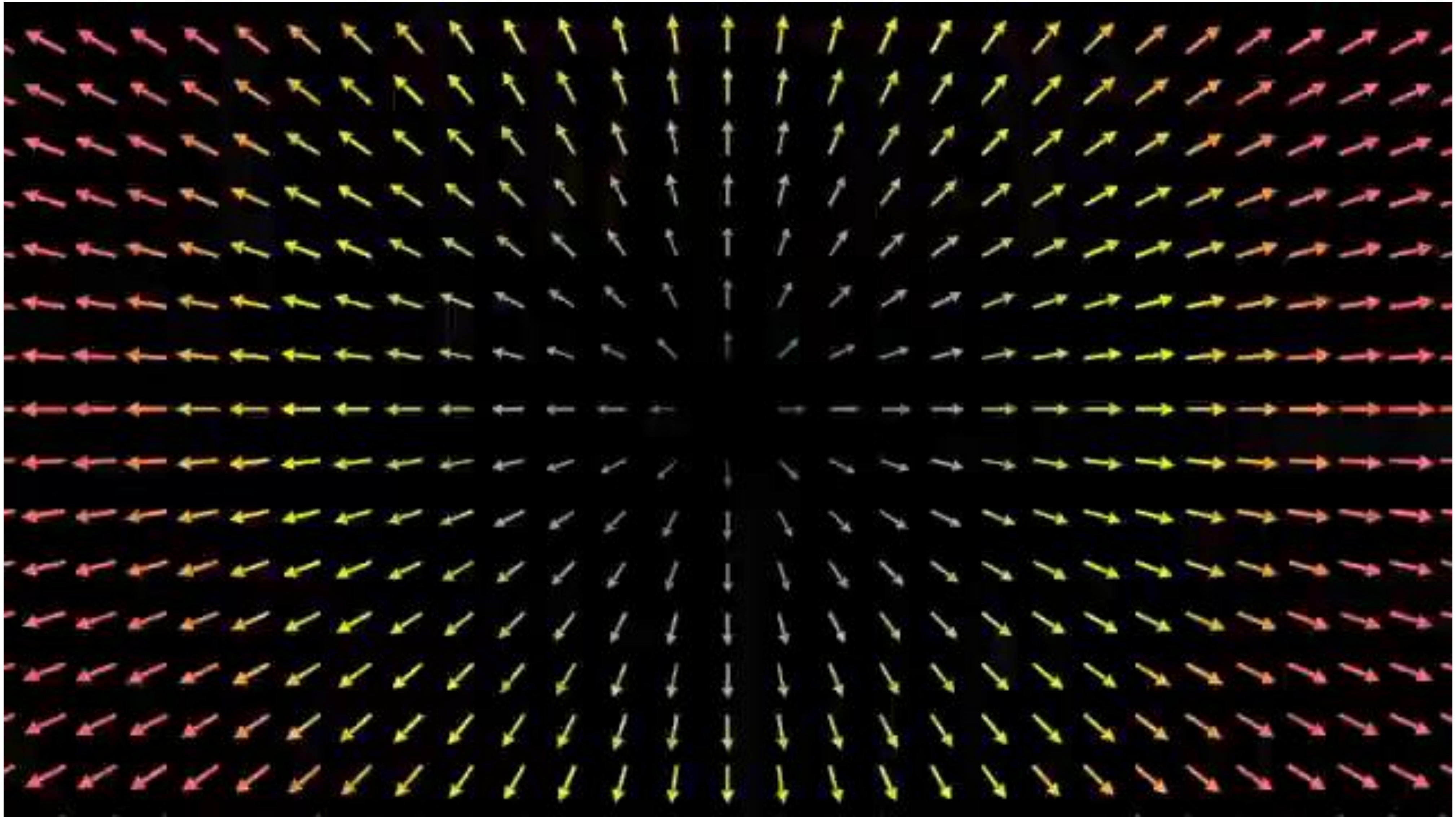
Ротор вектора $\vec{A}$ – це вектор $\vec{R}$,

$\vec{R} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, що має проекцію

$$R_n = \mathrm{rot}_n \vec{A} = \lim_{S \to 0} \left| \frac{\oint_L \vec{A}\,d\vec{l}}{S} \right|$$



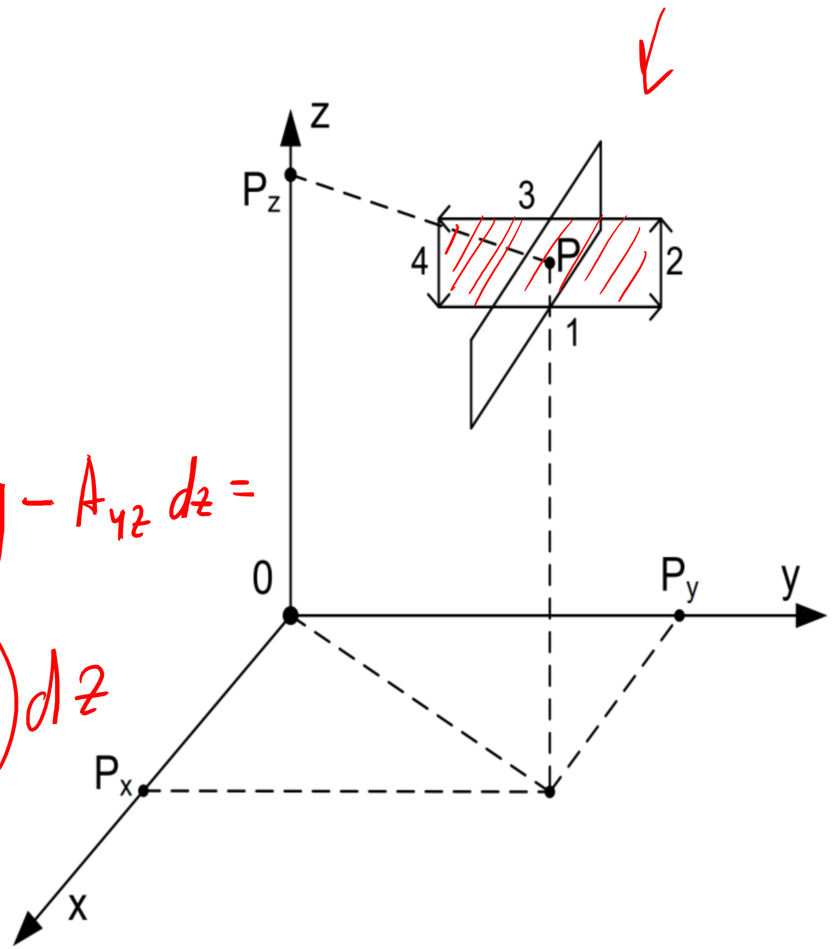
Визначення поняття векторного ротора



https://www.youtube.com/watch?v=gRelkDyMtwo&t=280s&ab_channel=ЗаписилекцийЛЭТИ

Проєкції векторного ротора

$$R_x = \mathrm{rot}_x \vec{A} = \lim_{dS \to 0} \left| \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{dS} \right|$$



$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = A_{1y} dy + A_{2z} dz - A_{3y} dy - A_{4z} dz =$$

$$= (A_{1y} - A_{3y}) dy + (A_{2z} - A_{4z}) dz$$

$$\downarrow dS \to 0$$

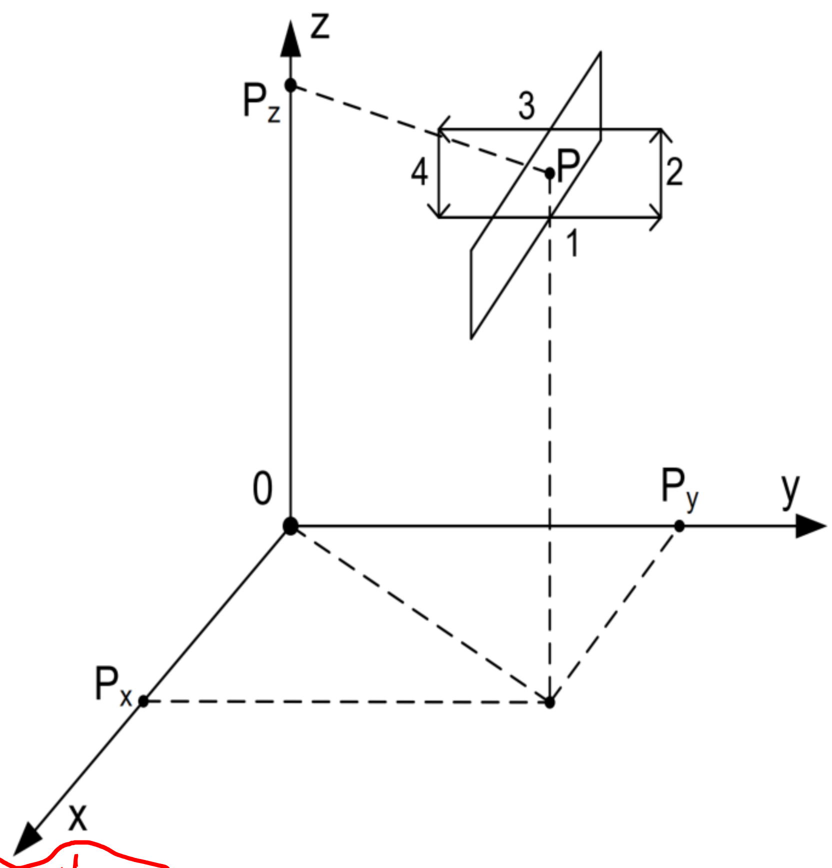
$$A_{1y} - A_{3y} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \cdot dz \qquad A_{2z} - A_{4z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy$$

Проєкції векторного ротора

$$\oint \vec{A}\,d\vec{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dx\,dy$$

$$\mathrm{rot}_x \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left\| \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\|$$



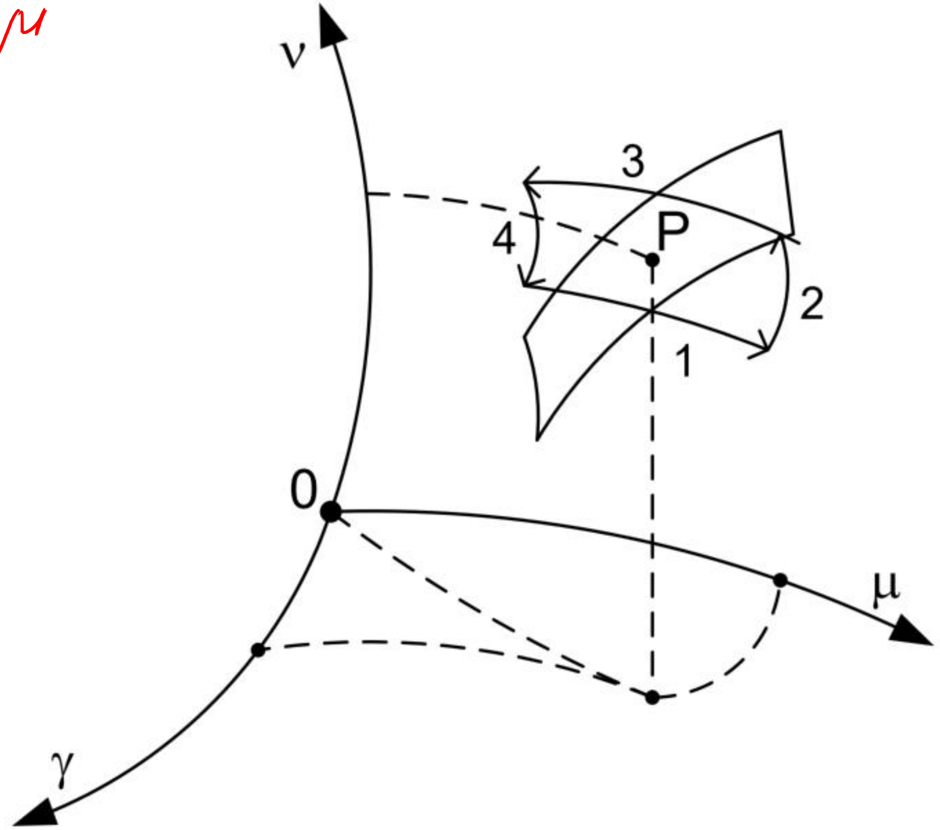
Проєкції векторного ротора

$$\oint \vec{A}\, d\vec{l} = -\frac{\partial (A_\mu h_\mu)}{\partial \nu}\, d\nu\, d\mu + \frac{\partial (A_\nu h_\nu)}{\partial \mu}\, d\nu\, d\mu$$

$$dS = h_\mu h_\nu\, d\mu\, d\nu$$

$$R_\gamma = \frac{1}{h_\mu h_\nu}\left[\frac{\partial [A_\nu h_\nu]}{\partial \mu} - \frac{\partial [A_\mu h_\mu]}{\partial \nu}\right]$$

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \end{gathered}}$$



Теорема Стокса

$$R_n = \text{rot}_n \vec{A} = \frac{d\left[\oint_L \vec{A}\,d\ell\right]}{dS}$$

$$d\left[\oint_L \vec{A}\,d\ell\right] = \text{rot}_n \vec{A} \cdot dS = \text{rot}\,\vec{A}\,d\vec{S} = \vec{R}\,d\vec{S}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{A}\,d\ell = \int_S \vec{R}\,dS = \int_S \text{rot}\,\vec{A}\,d\vec{S}}$$

Зв'язок магнітного поля та струму в диференціальній формі

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = I \qquad I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}, \text{ а також } \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{H}\, d\vec{S}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0}$$

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H}\, dS = \int_S \vec{j}\, dS$$

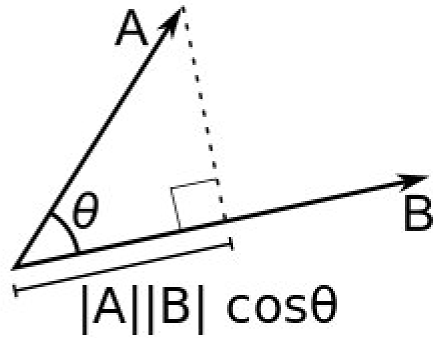
$\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{j} = 0$, або $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H}\, dS - \int_S \vec{j}\, dS = 0 \Rightarrow \int_S (\overbrace{\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}})\, dS = 0$$

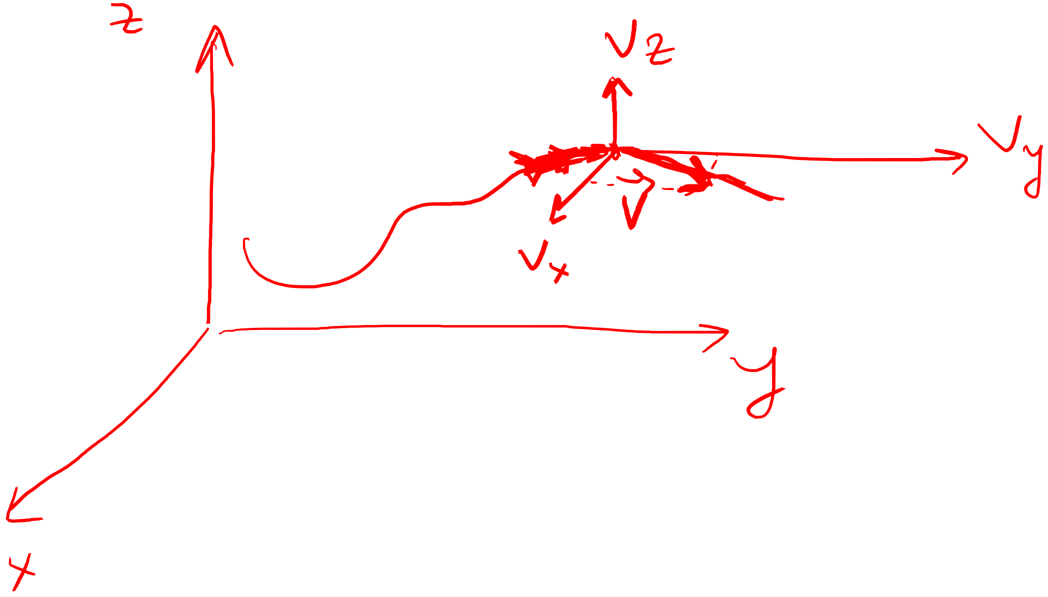
Векторний оператор набла

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

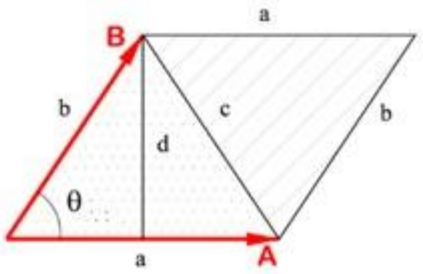
Скалярний добуток



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta = x_a x_b + y_a y_b$$



Векторний добуток



$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta =$$

$$= x_a y_b - y_a x_b$$

Векторний оператор набла

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

u - скаляр

$\vec{v}$ - вектор

$$(u \cdot \vec{v})' = u\vec{v}' + u'\vec{v}$$

$$(\vec{\mu} \cdot \vec{v})' = \vec{\mu}\,\vec{v}' + \vec{\mu}'\vec{v}$$

$$(\vec{\mu} \times \vec{v})' = \vec{\mu} \times \vec{v}' + \vec{\mu}' \times \vec{v}, \quad \vec{\mu} \times \vec{v}' = -\vec{v}' \times \vec{\mu}$$

Векторний оператор набла

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Градієнт

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u = \left(\vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \vec{i}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

Дивергенція

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Ротор

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = i_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_x \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Векторний оператор набла

1. $rot\,grad\;u = \nabla \times (\nabla u)$ $\quad$ $rot\,grad\;u = 0$

2. $div\,rot\vec{A} = \nabla\left(\nabla \times \vec{A}\right)$ $\quad$ $div\,rot\vec{A} = 0$

3. $rot\,rot\vec{A} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla\vec{A}\right) - (\nabla\nabla)\vec{A} = grad\,div\vec{A} - \nabla^2\vec{A}\,,$ $\quad$ $\nabla^2\vec{A} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}$

4. $\nabla(u_1u_2) = u_1\nabla u_2 + u_2\nabla u_1$

5. $div\left(u\vec{A}\right) = \nabla\left(u\vec{A}\right) = u\nabla\vec{A} + \nabla u\vec{A} = u\,div\vec{A} + grad\,u\,\vec{A}$

6. $div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\left(\nabla\times\vec{A}\right) + \vec{A}\left(\vec{B}\times\nabla\right)$

7. $rot\left(\varphi\vec{A}\right) = \nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\nabla\times A + \nabla\varphi\times A = \varphi\,rot\,A + grad\,\varphi\times\vec{A}$

Контрольні запитання

1. Ротор вектора є диференціальною чи інтегральною характеристикою полів?

2. Який величині дорівнюють $rot\ gradU$ і $div\ rot\vec{A}$?

3. Наведіть математичний запис та фізичний зміст теореми Стокса.

1. У чому полягає сенс використання оператора набла в теорії поля?

2. Подайте математичні вирази для градієнта, ротора та дивергенції за допомогою оператора набла.

Дякую за увагу!