

**В. К. Волосюк, С. С. Жила, В. Г. Яковлєв**

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПРИСТРОЇ МІКРОХВИЛЬОВОГО ДІАПАЗОНУ**

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

**В. К. Волосюк, С. С. Жила, В. Г. Яковлєв**

**ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПРИСТРОЇ МІКРОХВИЛЬОВОГО ДІАПАЗОНУ**

Конспект лекцій

Харків «ХАІ» 2023

УДК 621.396.96  
В68

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. М. В. Руженцев,  
д-р фіз.-мат. наук, проф. М. І. Дмитришин

**Волосюк, В. К.**

В68 Електродинаміка та пристрої мікрохвильового діапазону [Електронний ресурс]: консп. лекцій / В. К. Волосюк, С. С. Жила, В. Г. Яковлєв. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2023. – 152 с.

Висвітлено основи електродинаміки, питання поширення електромагнітних хвиль, особливості роботи пристроїв, що спрямовують електромагнітні хвилі. Наведено аналіз сучасних типів пристроїв мікрохвильового діапазону. Приділено значну увагу математичному обґрунтуванню законів електростатичних полів, теорії змінного електромагнітного поля та комплексної форми визначення рівнянь Максвелла.

Для наукових співробітників, аспірантів і студентів, які спеціалізуються у галузях проектування радіотехнічних систем.

Іл. 65. Табл. 1. Бібліогр.: 11 назв

**УДК 621.396.96**

- © Волосюк В. К., Жила С. С., Яковлєв В. Г., 2023
- © Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2023

## ВСТУП

Електродинаміка – це наука про фізичні закони, пов'язані з властивостями та поведінкою одного з особливих видів матерії – електромагнітного поля.

Вона вивчає характер взаємодії електростатичних та магнітостатичних полів із зарядами та струмами, особливості поведінки змінних електромагнітних полів та їх взаємодії, принципи випромінювання цих полів та поширення у різних середовищах. Цими середовищами можуть бути спеціальні лінії передачі полів: довгі лінії, коаксіальні кабелі, хвилеводи, мікросмужкові лінії, уповільнювальні системи та ін. Цими середовищами, наприклад, є атмосфера Землі та атмосфери інших планет. У окремому випадку – це вільний простір. Різним є характер поширення радіохвиль у тропосфері Землі, в її іоносфері, в приземних шарах і приводних шарах атмосфери, в навколосонячному просторі, в навколосонячному просторі тощо від нерівної поверхні моря, від різноманітних рослинних покривів.

На відміну від механіки, що включає статику (що вивчає характер розподілу сил у тілах, що знаходяться нерухомо в рівновазі), кінематику (що вивчає особливості руху тіл за різними траєкторіями з описом поведінки їх швидкостей, прискорень та похідних вищих порядків без залучення понять сил, мас та інерції руху) та динаміку (що вивчає характер руху з урахуванням впливу різних сил), електродинаміка охоплює все коло питань, пов'язаних як з описом постійних (статичних) електричних та магнітних полів (електростатика та магнітостатика), так і з описом змінних полів як без урахування впливу зовнішніх сил, так і з урахуванням впливу струмів і електрично заряджених тіл.

Слід зазначити, що для опису фізичних полів користуються їх поданням у вигляді математичних функцій і різних рівнянь. У цьому випадку функції багатьох змінних як математичні вирази також часто називають полями.

Математичний опис полів зазвичай задають як скалярних чи векторних функцій багатьох змінних, зокрема, як функцій трьох просторових координат –  $x, y, z$ .

Скалярне поле описується функцією

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

Векторне поле – функцією

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(x, y, z) = \left\| \Phi_x(x, y, z), \Phi_y(x, y, z), \Phi_z(x, y, z) \right\|.$$

Надалі стрілками (наприклад,  $\vec{E}$ ) позначатимемо векторні величини, а подвійними вертикальними рисками – векторні та матричні ( $\vec{E} = \|\|E_x, E_y, E_z\|\|$ ).

Векторною функцією трьох просторових змінних  $\vec{r} = \|x, y, z\|$  і часу  $t$

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \|\|V_x(\vec{r}, t), V_y(\vec{r}, t), V_z(\vec{r}, t)\|\|$$

можна описати поле швидкостей вітру в атмосфері, що являє собою залежність величини та напрямки швидкості вітру у кожний момент часу  $t$  у різних точках простору з координатами  $\vec{r}$ .

Аналогічною скалярною функцією можна описати поле температур  $T(\vec{r}, t)$ .

Напруженості змінних електричного та магнітного полів описуються відповідними функціями  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  та  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ . Постійні електричні і магнітні поля описуються функціями  $\vec{E}(\vec{r})$  і  $\vec{H}(\vec{r})$ , що не залежать від часу.

Напруженості  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  є лише проявами електромагнітного поля, що спостерігаються при його впливі на різні інші фізичні об'єкти.

Електромагнітне поле як вид матерії є дуже складним об'єктом для розуміння його внутрішньої фізичної суті. На сьогодні деякі досить наближені відповіді щодо внутрішньої будови цього виду матерії дають квантова механіка і квантова електродинаміка.

Матеріал, що викладається в цьому курсі, в основному є змістом макроскопічної електродинаміки, основні закони якої базуються на поняттях, введених шляхом аналізу сил взаємодії тих проявів електромагнітного поля, які призводять до руху електричних зарядів та зміни їх струмів у вимірювальних приладах.

В атомній фізиці, фізиці елементарних частинок, у галузях науки і техніки, пов'язаних із застосуванням лазерів та когерентних оптичних систем, виникає необхідність вивчення елементів мікроскопічної електродинаміки (квантової електродинаміки), що враховує квантово-механічну природу будови речовини та поля.

Перелічимо основні розділи електродинаміки.

Електростатика. Вивчає властивості та відповідні закони взаємодії зарядів та створюваних ними постійних електричних полів.

Магнітостатика. Вивчає властивості постійних магнітних полів та закони їх взаємодії з постійними струмами.

Основи теорії змінних електромагнітних полів та їх поширення.

Закони та принципи випромінювання змінних електромагнітних полів.

Основи теорії передачі енергії електромагнітних полів по напрямних середовищах: хвилеводах, мікросмужкових лініях, сповільнювальних структурах та ін.

Поширення радіохвиль в атмосфері, включаючи іоносферу та вплив земної поверхні.

Поширення радіохвиль у навколоземному та космічному просторі.

Поширення радіохвиль у плазмі.

Поширення радіохвиль у гіротропних середовищах.

Квантова теорія поля (квантова електродинаміка).

# Лекція 1

## ЗАКОНИ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

### 1.1. Закон Кулона

Одним із основних законів, що описують взаємодію електростатичних полів, створюваних зарядженими тілами (рис. 1.1), є закон Кулона, сформульований Шарлем Августином Кулоном 1785 року. Великий внесок у коректне формулювання цього закону зробили М. В. Ломоносов, його друг Г. В. Ріхман, вчений Ф. Епінус та ін.

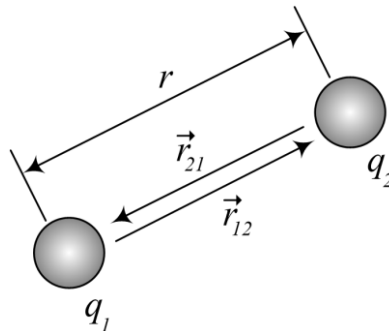


Рис. 1.1. Взаємодія заряджених тіл

Математичне формулювання цього закону виглядає так:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{21}, \quad (1.1)$$

де  $\vec{F}$  – сила тяжіння або відштовхування точкових зарядів  $q_1$  та  $q_2$ ;  $k = (4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^{-1}$ ;  $\epsilon_0$  і  $\epsilon_r$  – абсолютна діелектрична проникність вакууму та відповідно відносна діелектрична проникність середовища;  $\vec{r} = |\vec{r}| \vec{r}_0$  – вектор відстані між зарядами, які вважаються точковими;  $|\vec{r}|$  – модуль відстані, що дорівнює безпосередньо відстані між зарядами (будемо позначати як  $r$ );  $\vec{r}_0$  – одиничний вектор у напрямку від одного заряду до іншого і вказує на напрямок дії сили  $\vec{F}$ .

За абсолютною величиною

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{\epsilon_a} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}, \quad (1.2)$$

де  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$  – абсолютна діелектрична проникність середовища. З цієї формули видно, що сила  $F$  зменшується пропорційно до збільшення площі сфери  $S = 4\pi r^2$ .

Вибір величини  $k$  залежить від прийнятої системи одиниць. Тут використовується міжнародна система одиниць СІ, у якій за одиницю сили прийнято 1 Ньютон (Н), за одиницю довжини – 1 метр (м), за одиницю заряду – 1 кулон (Кл).

Абсолютна діелектрична проникність вакууму,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2), \text{ де } k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8,842 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2). \quad (1.3)$$

Зауважимо, що 1 кулон – це заряд  $q$ , що проходить за 1 с (секунду) крізь поперечний переріз провідника при силі струму 1 А (Ампер). Відзначимо також, що заряд в 1 кулон є занадто великою величиною і реально невелике тіло їм зарядити неможливо.

## 1.2. Напруженість електростатичного поля

Напруженість електростатичного поля чисельно визначається силою, що діє зарядженою частинкою із зарядом  $q$  на одиничний заряд. Якщо ввести пробний заряд  $q_0$  у полі заряду  $q$ , то напруженість поля  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ , тобто це сила, що діє на заряд  $q_0$ ,  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ . Відповідно до закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{qq_0}{r^3} \vec{r}, \text{ тоді}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.4)$$

$$\text{Модуль } \vec{E}, |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \frac{q}{r_a^2}.$$

## 1.3. Силкові лінії електростатичного поля

Силкові лінії векторного поля – це лінії, дотичні до яких збігаються з напрямком вектора напруженості поля  $\vec{E}$ . Силкові лінії полів точкових позитивного та негативного зарядів (кожного окремо) показані на рис. 1.2.



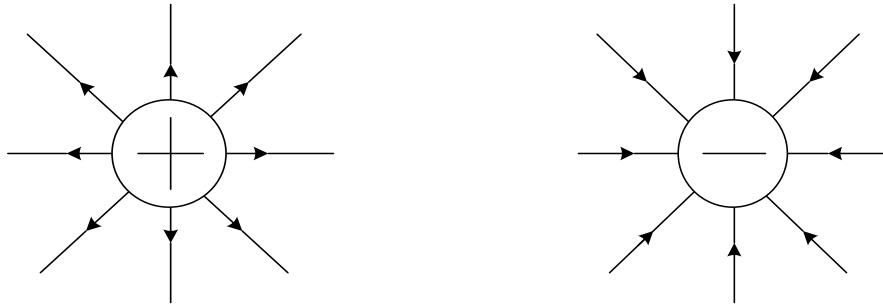


Рис. 1.2. Силові лінії полів окремо позитивного та негативного зарядів

Силові лінії взаємодіючих позитивного та негативного зарядів показані на рис. 1.3.

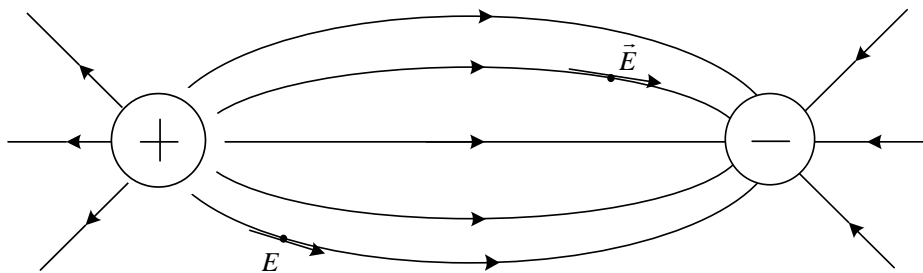


Рис. 1.3. Силові лінії поля взаємодіючих позитивного та негативного зарядів

Величину напруженості поля  $\vec{E}$ , тобто її модуль  $E = |\vec{E}|$  часто визначають як кількість силових ліній, що пронизують перпендикулярно розташовану до них одиничну площинку (поверхню одиничної площі).

#### 1.4. Вектор електростатичної індукції

Вектор електростатичної індукції визначається таким виразом:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} = \varepsilon_a \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}. \quad (1.5)$$

Він залежить від діелектричної проникності середовища. Його величину також можна визначати кількістю силових ліній, що пронизують перпендикулярно розташовану до них одиничну площинку. Оскільки поле вектора індукції не залежить від властивостей середовища, то силові лінії у цьому полі не перериваються при переході з одного середовища в інше. Кількість силових ліній електричного поля  $\vec{E}$  в неоднорідних середовищах з різними значеннями діелектричної проникності  $\varepsilon_a$  буде змінюватися.

Тобто силові лінії цього поля в таких середовищах не будуть безперервними.

### 1.5. Принцип суперпозиції полів

Для системи зарядів  $q_1, q_2, q_3 \dots q_N$  сумарне поле буде таким:

$$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N ; \quad \vec{D}_\Sigma = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 + \dots + \vec{D}_N , \quad (1.6)$$

суми тут векторні.

Якщо  $N = 2$ , маємо картину, зображену на рис. 1.4.

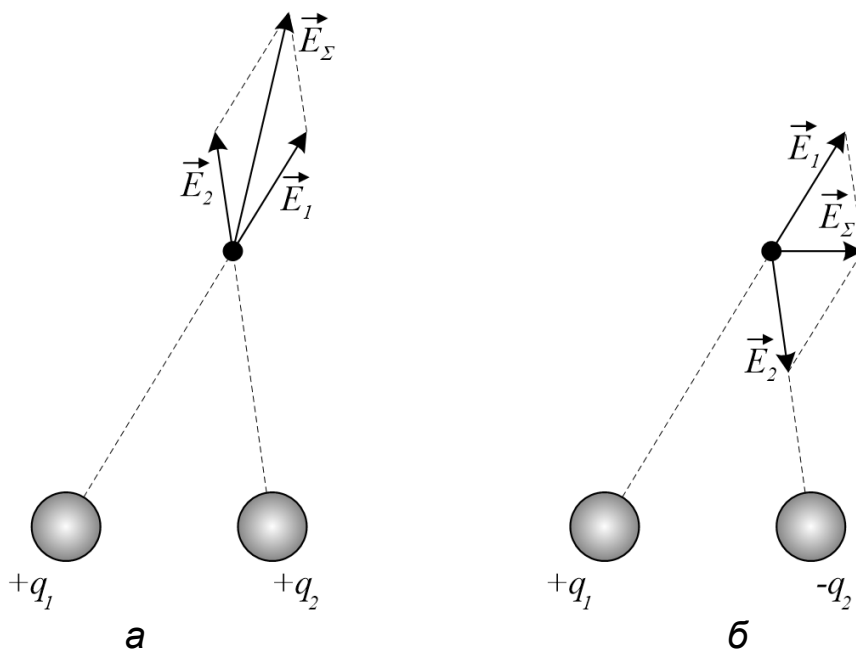


Рис. 1.4. Сумарне поле при взаємодії двох зарядів: а – одного знака; б – протилежних знаків

### Контрольні запитання

1. Який вираз описує силу взаємодії електростатичних полів, створюваних зарядженими тілами? Визначте всі його складові та їх одиниці вимірювання.

2. Наведіть співвідношення, що пов'язує напруженість електростатичного поля і силу тяжіння або відштовхування точкових зарядів.

3. Яка з наведених характеристик електростатичного поля не залежить від параметрів середовища: сила взаємодії точкових зарядів ( $\vec{F}$ ), напруженість електростатичного поля ( $\vec{E}$ ), вектор електростатичної індукції ( $\vec{D}$ ) ?

## Лекція 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

### 2.1. Концепція вектора потоку. Рівність Гаусса – Остроградського

Підрахуємо сумарну кількість силових ліній вектора електростатичної індукції, що пройшли крізь замкнуту сферу радіуса  $r$ , що оточує заряд  $q$ . Оскільки величина  $|\vec{D}| = D$  – це кількість силових ліній, що припадають на одиницю перпендикулярної площинки, крізь яку ці лінії проходять, то сумарна їх кількість, що пройшла крізь сферу, визначається так:

$$D \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = q. \quad (2.1)$$

Отже, загальна кількість силових ліній, що пройшли крізь усю сферу, яку називатимемо їх потоком, дорівнює величині заряду. Неважко показати, що ця кількість силових ліній пройде крізь будь-яку замкнуту поверхню, що оточує заряд, і буде дорівнювати величині  $q$ . Якщо ж оточити замкнутою поверхнею кілька зарядів із сумарним зарядом  $\sum_{i=1}^N q_i$ , то сумарний потік крізь цю поверхню становитиме  $\sum_{i=1}^N q_i$ . Це твердження є основою рівності та теореми Гаусса – Остроградського.

Введемо поняття потоку вектора індукції в такий спосіб. Оскільки величина  $|\vec{D}| = D$  – це кількість силових ліній, що пронизують перпендикулярно до них розташовану одиничну площинку, то крізь площинку  $d\vec{S}$  довільної орієнтації пройде така кількість силових ліній:

$$\vec{D}d\vec{S} = DdS \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = DdS_{\perp}. \quad (2.2)$$

Це і є потік вектора  $\vec{D}$  крізь площинку  $d\vec{S}$ . Орієнтацію площинки  $d\vec{S}$  задаємо вектором нормалі  $\vec{n}$ , розташованим перпендикулярно до цієї площинки.

$\vec{D}d\vec{S}$  є скалярним добутком векторів  $\vec{D}$  та  $d\vec{S}$ . Площа  $dS_{\perp} = dS \cos(\vec{D}, d\vec{S})$  розташована перпендикулярно до потоку силових ліній вектора  $\vec{D}$  (рис. 2.1).

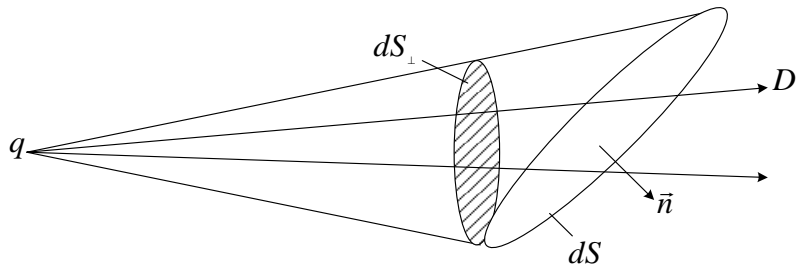


Рис. 2.1. Потік вектора  $\vec{D}$  крізь площинку  $d\vec{S}$

Загальна кількість ліній, що проходить крізь замкнуту поверхню  $S$ , що оточує заряд  $q$ , визначається формулою

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D dS \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = \oiint_S \frac{q}{4\pi r^2} dS_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} q d\Omega = q,$$

де  $d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2}$  – елемент тілесного кута, а повний тілесний кут при інтегруванні становитиме  $4\pi$ . Неважко показати, що, якщо охопити замкнутою поверхнею  $N$  зарядів із сумарним зарядом  $\sum_{i=1}^N q_i$ , то отримаємо вираз

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i. \quad (2.3)$$

Ця рівність є основою теореми Гаусса – Остроградського та називається рівністю Гаусса – Остроградського. Отримана вона російським математиком М. В. Остроградським і незалежно від нього німецьким математиком К. Ф. Гауссом. Ця рівність свідчить, що потік вектора індукції  $\vec{D}$  крізь замкнуту поверхню  $S$  будь-якого виду дорівнює сумі зарядів, що знаходяться всередині об'єму, обмеженого цією поверхнею. Очевидно, що потік вектора  $\vec{E}$  крізь поверхню  $S$  середовища з діелектричною проникністю  $\epsilon_a$

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_a}. \quad (2.4)$$

## 2.2. Дивергенція вектора індукції поля

Для дослідження локальних характеристик полів доцільно перейти від рівності Гаусса – Остроградського, що описує поля в інтегральній

формі, до її диференціального подання, а це дає можливість дослідити зміни полів та зарядів як функцій просторових координат при переході від одного нескінченно малого об'єму простору до іншого. Якщо рівність Гаусса – Остроградського дає змогу оцінити лише сумарний заряд усередині деякого об'єму за даними підрахунку потоку поля крізь поверхню, що обмежує цей об'єм, то дивергенція поля по розрахованому полю в заданих точках простору дає змогу оцінити розподіл густини заряду в цих точках. Завдання знаходження розподілів густин зарядів у вигляді функцій координат за відповідними змінами поля належить до класу зворотних задач електростатики.

Для визначення поняття «дивергенція поля» виразимо заряд  $q$  через його густину  $\rho$ :

$$q = \int_V \rho dV, \quad \rho = \frac{dq}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho dV}{V}. \quad (2.5)$$

Тоді рівність Гаусса – Остроградського набуде вигляду

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.6)$$

Розділимо обидві частини рівності на величину об'єму  $V$  і спрямуємо його в околі обраної точки  $A(\vec{r}) = A(x, y, z)$  до нуля:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{D} d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho dV}{V} = \rho. \quad (2.7)$$

Величину

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{D} d\vec{S}}{V} = \text{div } \vec{D} \quad (2.8)$$

назвемо дивергенцією вектора  $\vec{D}$ . Як видно з попередньої рівності, вона дорівнює густині заряду  $\rho$  у деякій точці простору, тобто

$$\text{div } \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}). \quad (2.9)$$

Її легко розрахувати, обчисливши потік поля крізь нескінченно малий об'єм найпростішої форми (наприклад, об'єм у вигляді паралелепіпеда), що оточує досліджувану точку  $A(x, y, z)$ , і розділивши отриманий потік на величину цього малого об'єму. Форма нескінченно малого об'єму залежить від вибору системи координат (декартової, циліндричної або сферичної).

Виконаємо розрахунок потоку поля в декартовій системі координат (рис. 2.2).

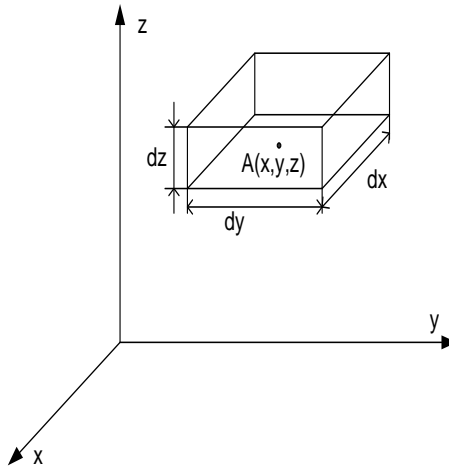


Рис. 2.2. До визначення дивергенції поля  $\vec{D}$

Оточимо точку  $A(x, y, z)$  нескінченно малим об'ємом. Пронумеруємо грані: по осі  $x$  – ближню та дальню грані номерами 1 та 2 відповідно; по осі  $y$  – праву та ліву номерами 3 та 4; по осі  $z$  – верхню та нижню номерами 5 та 6. Грані розташовані перпендикулярно до осей  $x$ ,  $y$  та  $z$ .

Сумарний потік вектора індукції  $\vec{D}$  крізь ці грані відповідно дорівнюватиме сумі потоків з урахуванням знаків, що характеризують орієнтацію граней. Потік крізь ближню та дальню грані у напрямках осі  $x$

$$D_x(1)dydz - D_x(2)dydz = [D_x(1) - D_x(2)]dydz.$$

Розділивши і помноживши праву частину на  $dx$  у межах (при  $V \rightarrow 0$ ), отримаємо

$$\frac{[D_x(1) - D_x(2)]}{dx} dx dy dz = \frac{\partial D_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Аналогічно крізь інші грані потоки відповідно дорівнюють  $\frac{\partial D_y}{\partial y} dx dy dz$  і

$\frac{\partial D_z}{\partial z} dx dy dz$ . Сумарний потік

$$\left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

а

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_S \vec{D} d\vec{S}}{V = dx dy dz} \right) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

На підставі (2.5) маємо

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (2.10)$$

Отже, обчисливши суму окремих похідних від проєкцій вектора індукції в заданій точці простору, можна знайти в цій точці густину заряду (з урахуванням знаку). Якщо  $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ , то зарядів у відповідних точках немає.

### 2.3. Теорема Гаусса – Остроградського

Ураховуючи, що

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D}, \quad q = \int_V \rho dV, \quad \oiint \vec{D} d\vec{S} = q,$$

після інтегрування  $\operatorname{div} \vec{D}$  отримаємо

$$\oiint \vec{D} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV. \quad (2.11)$$

Це інтегральне співвідношення є змістом теореми Гаусса – Остроградського. Ця теорема справджується також у випадках, коли досліджуваний об'єм обмежений кількома замкнутими поверхнями, рис. 2.3.

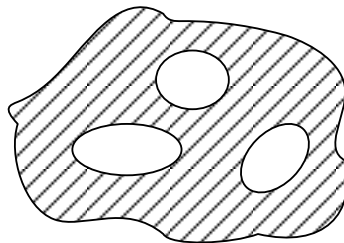


Рис. 2.3. Об'єм, обмежений чотирма замкнутими поверхнями

#### Контрольні запитання

1. Яка величина дорівнює кількості силових ліній, що проходять крізь одиничну перпендикулярну площинку?
2. Опишіть фізичний зміст рівності Гаусса – Остроградського.
3. Дивергенція вектора електростатичної індукції є диференціальною чи інтегральною характеристикою електростатичних полів?

## Лекція 3 РОБОТА ТА ПОТЕНЦІАЛ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

### 3.1. Робота електричного поля заряду

Основні визначення потенціалу електричного поля такі самі, як у механіці для гравітаційного поля. Однак у зв'язку з тим, що електричні заряди можуть бути як позитивними, так і негативними, величини потенціалів також можуть мати відповідні знаки.

Поняття потенціалу і навіть різниці потенціалів, як і в механіці, пов'язані з роботою сил поля.

Розглянемо роботу, виконану силами електричного поля заряду  $q$  при переміщенні заряду  $q_0$  з точки А в точку В, як показано на рис. 3.1. Переміщення заряду може здійснюватися або шляхом L1, або шляхом L2, або якимсь іншим шляхом.

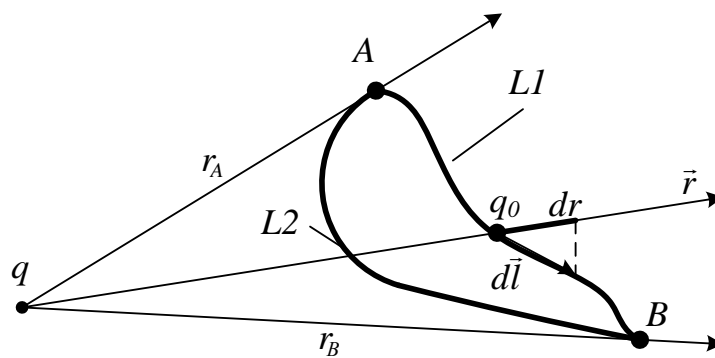


Рис. 3.1. Переміщення заряду  $q_0$  з точки А в точку В у полі заряду  $q$

Елементарна робота на шляху  $d\vec{l}$

$$dA = \vec{F} d\vec{l} .$$

Сила

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_a r^3} \vec{r} .$$

Тоді

$$dA = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_a r^3} \vec{r} d\vec{l} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_a r^3} r dl \cos(\vec{r}, d\vec{l}) = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_a r^2} dr ,$$



де  $dr = dl \cos(\vec{r}, d\vec{l})$  – проекція  $d\vec{l}$  на напрямок  $\vec{r}$ ,  $|\vec{r}| = r$ .

Повна робота з переміщення заряду  $q_0$  у полі сил заряду  $q$  від точки А до точки В буде результатом обчислення інтеграла

$$A = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_a} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (3.1)$$

Отриманий вираз свідчить про те, що ця робота залежить не від шляхів переміщення заряду  $q_0$  (L1 або L2), а від положення точок А і В.

Якщо робота сил поля не залежить від шляху переміщення заряду з точки А до точки В, то такі сили та поля називають консервативними.

Неважко показати, що робота сил поля по замкнутому контуру дорівнює нулю (рис. 3.2):

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

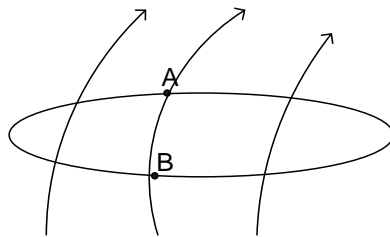


Рис. 3.2. Робота сил поля по замкнутому контуру

### 3.2. Визначення потенціалу

Якщо взяти дві точки А і В і знайти роботу сил поля переміщення одиничного заряду (у цьому випадку сила  $\vec{F}$  дорівнює напруженості поля  $\vec{E}$  визначення)  $A_{(q_0=1)} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$ , то потенціал або потенційна функція поля  $U$  визначається як різниця значень цієї функції  $U_A$  і  $U_B$  у точках А і В:

$$U_A - U_B = A_{(q_0=1)}.$$

Як і в механіці, ця робота дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій із протилежним знаком. Якщо заряд рухається з точки А в точку В під дією сил поля, то очевидно, що потенціал точки поля в точці А більше потенціалу в точці В і зміна потенціальної енергії  $\Delta W$  буде мати від'ємний знак відносно виконаної роботи, тобто до  $A_{(q_0=1)}$ .

$$\Delta W = -A_{(q_0=1)} = -\int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_B^A \vec{E} d\vec{l}. \quad (3.2)$$

Оскільки виконана робота характеризується різницею потенціалів, то під час виконання розрахунків значення мають не їх абсолютні значення, а різниця. Тому зручно ці потенціали відраховувати від деякого умовного рівня, який беруть таким, що дорівнює нулю. В інженерних розрахунках як нульовий потенціал приймають потенціал Землі або великих провідних (наприклад, металевих) середовищ. Якщо початок відліку величини потенціалу не визначено, то потенціал визначається у вигляді невизначеного інтеграла з точністю до деякої постійної таким виразом:

$$U = -\int \vec{E} d\vec{l}. \quad (3.3)$$

У багатьох випадках при виконанні теоретичних розрахунків вважають, що нульовий потенціал має нескінченно віддалену точку.

Тоді потенціал довільної точки В в електричному полі визначається роботою, яку виконують сили цього поля при перенесенні одиничного заряду з нескінченності в точку В:

$$U_B = -\int_{\infty}^B \vec{E} d\vec{l} = \int_B^{\infty} \vec{E} d\vec{l}. \quad (3.4)$$

Для точкового заряду  $q$  відповідно до формули (3.1)

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r_B}. \quad (3.5)$$

Для системи зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_N$  відповідно до принципу суперпозиції

$$U_B = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\epsilon_a r_i}, \quad (3.6)$$

де  $r_i$  – відстань від точкових зарядів до точки В.

Зрозуміло, що для об'ємно або поверхнево розподілених зарядів відповідно до об'ємної або поверхневої густини їх розподілу

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS};$$

$$U_B = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_a r} dV, \quad U_B = \int_S \frac{\sigma}{\epsilon_a r} dS, \quad (3.7)$$

де  $r$  – відстань від елементів об'єму  $dV$  або поверхні  $dS$  до точки В.

### 3.3. Градієнт скалярного поля потенціалу

Поняття градієнта потенціалу дає змогу розрахувати елементи  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  вектора електричного поля  $\vec{E}$  в кожній точці простору  $\vec{r} = \|x, y, z\|$  за значеннями поля потенціалу.

Якщо в полі  $U$  є поверхні, де значення потенціалу не змінюються, то такі поверхні називають екіпотенційними. Оскільки між окремими точками екіпотенційної поверхні немає різниці потенціалів, то очевидно, що робота сил поля при переміщенні зарядів уздовж такої поверхні дорівнюватиме нулю. Це означає, що проєкції сил поля на цю поверхню дорівнюватимуть нулю. Отже, у кожній точці екіпотенційної поверхні силові лінії електростатичного поля розташовані перпендикулярно до неї (рис. 3.3).

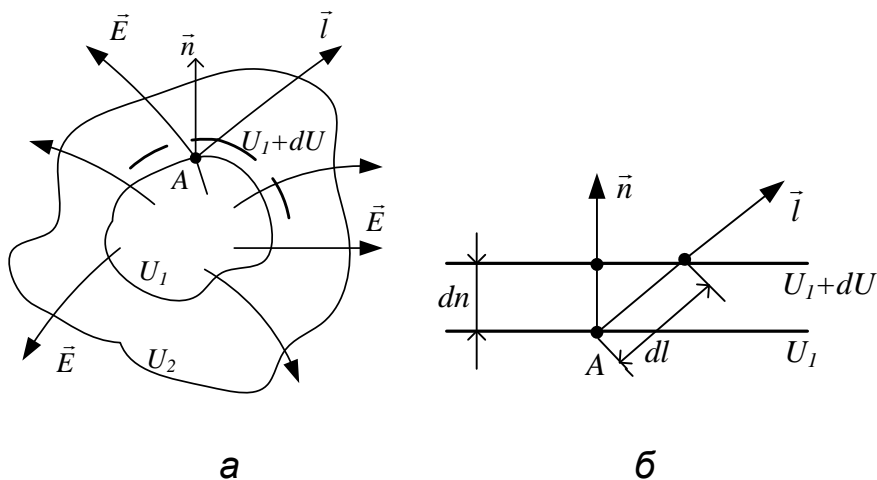


Рис. 3.3. Екіпотенційні поверхні (а), до визначення градієнта та похідної за напрямком (б)

Градієнтом потенціалу в точці  $A(x, y, z)$  назвемо похідну функції  $U$  по лінії, спрямованій у точці  $A$  вздовж вектора нормалі  $\vec{n}$ :

$$\text{grad} U_A = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} \cdot \vec{n} = \frac{dU}{dn} \cdot \vec{n}, \quad |\vec{n}| = 1. \quad (3.8)$$

Градiєнт потенціалу – це вектор, спрямований у кожній точці перпендикулярно до еквіпотенційної поверхні, тобто у напрямку вектора напруженості поля  $\vec{E}$ .

За абсолютною величиною градієнт потенціалу дорівнює швидкості зміни потенціалу у напрямку  $\vec{n}$ . З рис. 3.3 видно, що

$$\Delta n = \Delta l \cos(\vec{n}, \vec{l}).$$

Тоді

$$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn} \cos(\vec{n}, \vec{l}). \quad (3.9)$$

Функцію  $\frac{dU}{dl}$  називають похідною за напрямком.

З виразу (3.9) видно, що похідна за будь-яким напрямком, відмінним від напрямку нормалі, менше за абсолютним значенням похідної за напрямком нормалі. Таким чином, градієнт – це векторна величина, яка відповідає напрямку найшвидшої зміни потенціалу. Похідна у напрямку нормалі  $\frac{dU}{dn}$  має найбільше значення. Це добре помітно на рис. 3.3 б, де показано нескінченно малий окіл точки А. У цьому околі еквіпотенційні поверхні  $U$  і  $U + \Delta U$  практично паралельні та зміни потенціалу на інтервалах  $dn$  і  $dl = dn \cos(\vec{n}, \vec{l})$  однакові. Отже,

$$\frac{dU}{dn} < \frac{dU}{dl}.$$

Знайдемо тепер похідні потенціалу у точці А за напрямком кожної з координатних осей  $x$ ,  $y$  та  $z$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\vec{n}, \vec{x}), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\vec{n}, \vec{y}),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\vec{n}, \vec{z}).$$

Видно, що ці похідні є проєкціями градієнта (як векторної величини) по осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , тобто

$$\text{grad } U = \left\| \text{grad}_x U, \text{grad}_y U, \text{grad}_z U \right\| = \left\| \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\|, \quad (3.10)$$

де

$$\text{grad}_x U = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \text{grad}_y U = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{grad}_z U = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

За абсолютною величиною

$$|\text{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (3.11)$$

На підставі формул (3.2)–(3.4)

$$U = -\int \vec{E} d\vec{l} = -\int E dl \cos(\vec{E}, \vec{l}) = -\int \vec{E} d\vec{n}, \quad dU = -\vec{E} d\vec{n}$$

і

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn} \vec{n} = -\text{grad}U. \quad (3.12)$$

Отже, встановлено дуже важливий факт: напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу з протилежним знаком. Розписуючи цей вираз за координатами, знаходимо, що

$$\|E_x, E_y, E_z\| = -\|\text{grad}_x U, \text{grad}_y U, \text{grad}_z U\| = -\left\|\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\|, \quad (3.13)$$

або

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.14)$$

На підставі (3.2), враховуючи, що  $D = \varepsilon_a E$ , отримаємо

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (3.15)$$

З урахуванням (3.12) також отримаємо

$$\text{div} \vec{E} = -\text{div} \text{grad} U = \frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad (3.16)$$

або

$$\text{div} \text{grad} U = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (3.17)$$

Останнє рівняння називають рівнянням Пуассона. У розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (3.18)$$

Якщо у досліджуваному об'ємі відсутні заряди, то

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0, \quad (3.19)$$

або

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (3.20)$$

Це рівняння називають рівнянням Лапласа.

Отримані рівняння дають змогу розв'язати дуже важливу задачу: як, знаючи розподіл зарядів у певній області, визначити напруженість полів  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  у кожній точці простору з координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . З аналізу виразу (3.15) випливає, що розв'язати безпосередньо рівняння

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

щодо трьох невідомих  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  не можна.

Однак можна розв'язати диференціальні рівняння у частинних похідних Пуассона щодо однієї невідомої – потенціалу  $U$ , а потім знайти складові поля з рівняння (3.12). Щодо рівняння Лапласа, то, здавалося б, за відсутності зарядів його немає сенсу розглядати. Однак його розв'язання є дуже важливим тоді, коли можна задати граничні умови. У цьому випадку воно дає єдиний розв'язок для вільного простору, якщо задано значення полів на певній межі.

### Контрольні запитання

1. Чи залежить робота, виконана силами електричного поля заряду  $q$  при переміщенні заряду  $q_0$  з точки А в точку В, від шляху переміщення заряду? Чому дорівнює робота сил поля по замкнутому контуру  $\oint \vec{F} d\vec{l}$  ?
2. Який вираз описує потенціал довільної точки В в електричному полі системи зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_N$ ?
3. Дайте визначення градієнту потенціалу.

## Лекція 4 КРИВОЛІНІЙНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

### 4.1. Узагальнена система криволінійних координат

Найбільш часто використовуваною та звичною системою координат є декартова. Це ортогональна система, в якій координатні лінії  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  і координатні площини  $хоу$ ,  $хоз$ ,  $уoz$  є перпендикулярними одна одній. Координатні лінії у цій системі – це прямі. Однак при розв'язанні різних задач використовують інші системи координат. Найбільш поширеними є циліндрична та сферична системи координат. Ці системи також є ортогональними. Їх координатні лінії не є прямими. Але в точці їх перетину дотичні прямі до цих ліній є перпендикулярними.

Якщо розглядати декартову систему координат як вихідну, у якій координатами точки є значення змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то координати цієї точки в будь-якій іншій системі криволінійних координат є функціями координат вихідної системи, тобто

$$\gamma = \gamma(x, y, z), \quad \mu = \mu(x, y, z), \quad \nu = \nu(x, y, z), \quad (4.1)$$

де сукупність значень змінних  $\|\gamma, \mu, \nu\|$  є координатами цієї точки в новій аналізованій системі координат. Будемо її називати криволінійною системою, тому що в довільній системі координатні лінії не обов'язково мають бути прямими.

Для певності порівняємо між собою прямокутну (декартову) та циліндричну системи координат (рис. 4.1).

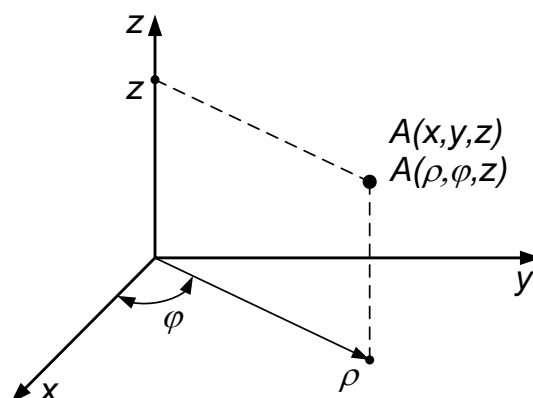


Рис. 4.1. Порівняння декартової та циліндричної систем координат

У циліндричній системі координат

$$\gamma = \rho = \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v = z = z(x, y, z) = z.$$

Оскільки і координати  $\|x, y, z\|$ , і координати  $\|\gamma, \mu, v\|$  характеризують положення однієї й тієї самої точки, то у функціональному зв'язку (4.1) між ними має бути взаємно однозначна відповідність, тобто деякій комбінації змінних  $\|x, y, z\|$  у функціональних залежностях (4.1) має відповідати одна і лише одна комбінація змінних  $\|\gamma, \mu, v\|$ .

Рівняння

$$\begin{aligned} \gamma(x, y, z) &= \gamma_1 = const, \\ \mu(x, y, z) &= \mu_1 = const, \\ v(x, y, z) &= v_1 = const \end{aligned} \tag{4.2}$$

є рівняннями координатних поверхонь (при  $\gamma_1 = \mu_1 = v_1 = 0$  ці поверхні проходять крізь початок координат). Перетинаючись між собою, ці поверхні утворюють координатні лінії. У ортогональних системах координат дотичні прямі до цих ліній у точках їх перетину перпендикулярні одна одній. Надалі розглядатимуться лише ортогональні системи координат, зокрема циліндрична та сферична.

З відповідності  $\gamma(x, y, z) = \gamma_2$  функціонального зв'язку координат  $\|x, y, z\|$  і  $\|\gamma, \mu, v\|$  випливає, що будь-які дві координатні поверхні вигляду  $\gamma(x, y, z) = \gamma_1$  не мають перетинатися одна з одною. Перетинаючи між собою дві координатні поверхні вигляду  $\mu(x, y, z) = \mu_1$  та  $v(x, y, z) = v_1$ , утворюють координатну лінію, вздовж якої змінюється змінна  $\gamma$ . Перетинаючи між собою координатні поверхні вигляду  $\gamma(x, y, z) = \gamma_1$  та  $v(x, y, z) = v_1$ , утворюють координатну лінію, вздовж якої змінюється змінна  $\mu$ .

У циліндричній системі координат (рис. 4.2)

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho_1 = const$$

– циліндрична поверхня;

$$\varphi(x, y, z) = \arctg \frac{y}{x} = \varphi_1 = const$$

– вертикальна напівплощина, початком якої є вісь  $z$ ;

$$z(x, y, z) = z = z_1 = const$$

– горизонтальна напівплощина.

При перетині ці поверхні дають координатні лінії  $\rho, \varphi, z$  (рис. 4.2).



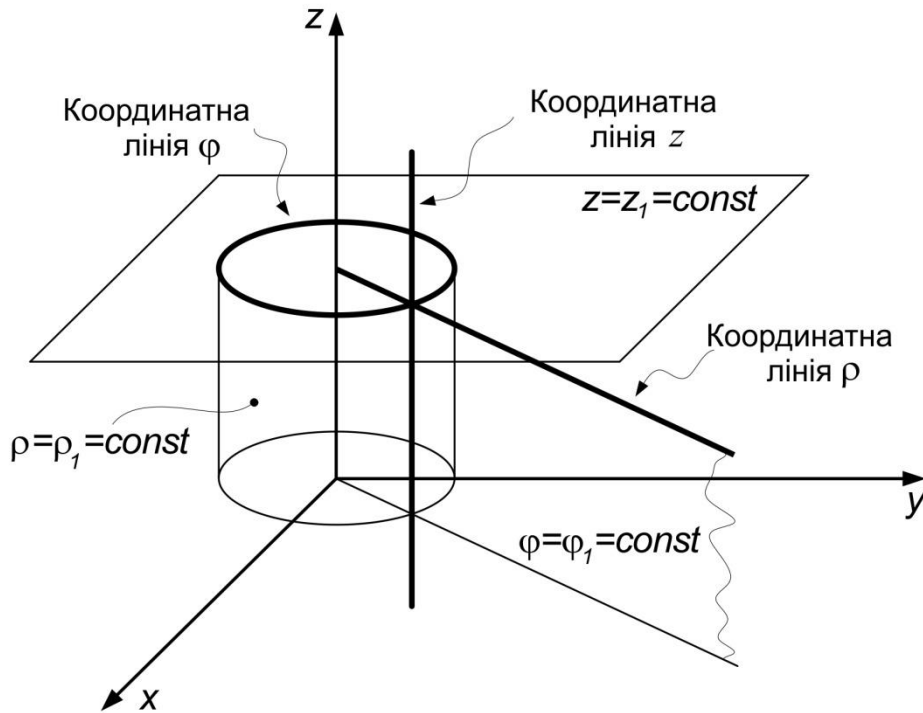


Рис. 4.2. Циліндрична система координат. Координатні поверхні та координатні лінії

#### 4.2. Приріст змінних у різних системах координат

Звичні прирісти змінних у декартовій системі координат – це  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$ . Ці прирости уздовж відповідних координатних ліній входять до складу різних похідних, до складу диференціальних рівнянь або під знаки інтегралів.

Розглянемо прирости (нескінченно малих) уздовж координатних ліній у довільних криволінійних ортогональних системах координат. Нехай це буде приріст уздовж координатної лінії  $\gamma$ :

$$dl_\gamma = h_\gamma d\gamma. \quad (4.3)$$

*Примітка:* не можна плутати приріст уздовж координатної лінії та приріст змінної. У декартовій системі координат ці прирости збігаються. В інших системах координат вони можуть не збігатися. Наприклад, у циліндричній системі координат приріст кутової координати (виражений у градусах або в радіанах) не збігається з приростом уздовж координатної лінії, що має розмірність довжини.

У прямокутній системі координат

$$dl_\gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (4.4)$$

Ця формула справджується для знаходження  $dl$  уздовж будь-якої лінії як координатної.

Якщо розглядати як вихідну криволінійну систему координат (4.1), то щодо неї можна записати систему зворотних функцій вигляду

$$x = x(\gamma, \mu, \nu), \quad y = y(\gamma, \mu, \nu), \quad z = z(\gamma, \mu, \nu). \quad (4.5)$$

Наприклад, у циліндричній системі координат

$$x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad y = y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Зауважимо, що цей функціональний зв'язок також взаємнооднозначний.

Знайдемо  $dx, dy, dz$ :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu.$$

Оскільки вздовж координатної лінії  $\gamma$  змінюється лише змінна  $\gamma$ , а інші координати  $\mu$  і  $\nu$  є незмінними, то прирости  $dx, dy, dz$  матимуть місце лише щодо змінної  $\gamma$ , тобто

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma.$$

Аналогічно

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma.$$

Тоді

$$dl_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2} d\gamma, \quad (4.6)$$

$$h_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Для довільної кривої в криволінійній системі координат (ортогональна)

$$dl = \sqrt{dl_\gamma^2 + dl_\mu^2 + dl_\nu^2} = \sqrt{h_\gamma^2 d\gamma^2 + h_\mu^2 d\mu^2 + h_\nu^2 d\nu^2}. \quad (4.8)$$

Відповідно елементи площі та об'єму будуть такими:

$$dS_\gamma = dl_\mu dl_\nu = h_\mu h_\nu d\mu d\nu,$$

$$dV = dl_\gamma dl_\mu dl_\nu = h_\gamma h_\mu h_\nu d\gamma d\mu d\nu. \quad (4.9)$$

У циліндричній системі координат:

$$dl_\gamma = dl_\rho = d\rho, \quad dl_\mu = dl_\phi = \rho d\phi, \quad dl_\nu = dl_z = dz;$$

$$h_\gamma = h_\rho = 1, \quad h_\mu = h_\phi = \rho, \quad h_\nu = h_z = 1;$$

$$dS_\rho = dl_\phi dl_z = \rho d\phi dz, \quad dS_\phi = dl_\rho dl_z = d\rho dz, \quad dS_z = dl_\rho dl_\phi = \rho d\rho d\phi;$$

$$dV = dl_\rho dl_\phi dl_z = \rho d\rho d\phi dz.$$

Ці співвідношення особливо важливі при обчисленні інтегралів під час переходу з однієї системи координат до іншої. Найбільший інтерес тут становитимуть записи дивергенції, градієнта та рівнянь Пуассона і Лапласа у різних системах координат.

### 4.3. Дивергенція, градієнт, рівняння Лапласа та Пуассона, ротор в ортогональних криволінійних системах координат

**Дивергенція.** Дивергенцію підраховуємо, як і раніше, за формулою

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \vec{D} d\vec{S}}{\Delta V}. \quad (4.10)$$

Розглянемо геометрію в криволінійній системі координат на рис. 4.3.

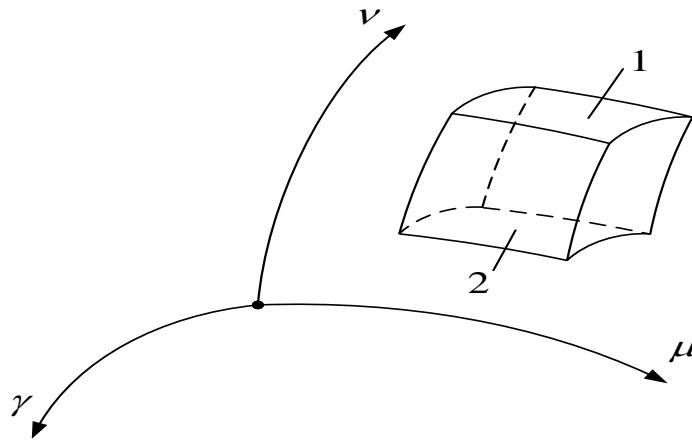


Рис. 4.3. До розрахунку дивергенції у криволінійних координатах

Потоки вектора  $D$  крізь верхню 1 і нижню 2 грані можна визначити з формули

$$(D_\nu dl_\gamma dl_\mu)_1 - (D_\nu dl_\gamma dl_\mu)_2 = [(D_\nu h_\gamma h_\mu)_1 - (D_\nu h_\gamma h_\mu)_2] d\gamma d\mu.$$

Розділивши на  $\partial \nu$  межі отримаємо, що це вираз

$$\frac{\partial(D_\nu h_\gamma h_\mu)}{\partial \nu} d\gamma d\mu d\nu.$$

Аналогічні вирази отримаємо для потоків крізь інші грані.

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int \vec{D} d\vec{S} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (D_\gamma h_\mu h_\nu) d\gamma d\mu d\nu + \frac{\partial}{\partial \mu} (D_\mu h_\gamma h_\nu) d\gamma d\mu d\nu + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \nu} (D_\nu h_\gamma h_\mu) d\gamma d\mu d\nu. \end{aligned}$$

Після поділу цього виразу на елемент об'єму  $dv = h_\gamma h_\mu h_\nu d\gamma d\mu d\nu$  відповідно до виразу (4.10) знаходимо, що

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{h_\gamma h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} (D_\gamma h_\mu h_\nu) + \frac{\partial}{\partial \mu} (D_\mu h_\gamma h_\nu) + \frac{\partial}{\partial \nu} (D_\nu h_\gamma h_\mu) \right]. \quad (4.11)$$

**Градiєнт.** За визначенням градієнт скалярної функції  $U$  характеризується її частинними похідними вздовж координатних ліній. У декартовій системі координат

$$\operatorname{grad} U = \left\| \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\|.$$

У довільній системі координат

$$\operatorname{grad} U = \left\| \frac{\partial U}{\partial l_\gamma}, \frac{\partial U}{\partial l_\mu}, \frac{\partial U}{\partial l_\nu} \right\| = \left\| \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} \right\|. \quad (4.12)$$

**Рiвняння Лапласа та Пуассона.** Розглянемо тепер рiвняння Лапласа (лапласіан). Замiнимо у виразах для дивергенції вектор  $\vec{D}$  на вектор  $\vec{E}$  (це не має значення для загального запису дивергенції вектора) та врахуємо, що

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\left\| \frac{\partial U}{\partial l_\gamma}, \frac{\partial U}{\partial l_\mu}, \frac{\partial U}{\partial l_\nu} \right\| = \left\| E_\gamma, E_\mu, E_\nu \right\|, \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{h_\gamma h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} (E_\gamma h_\mu h_\nu) + \frac{\partial}{\partial \mu} (E_\mu h_\gamma h_\nu) + \frac{\partial}{\partial \nu} (E_\nu h_\gamma h_\mu) \right]. \quad (4.14)$$

Тоді

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{h_\gamma h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial U}{\partial l_\gamma} h_\mu h_\nu \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial U}{\partial l_\mu} h_\gamma h_\nu \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial U}{\partial l_\nu} h_\gamma h_\mu \right) \right], \quad (4.15)$$

$$\partial l_\gamma = h_\gamma \partial \gamma, \quad \partial l_\mu = h_\mu \partial \mu, \quad \partial l_\nu = h_\nu \partial \nu.$$

Відповідно, лапласіан має вигляд

$$\operatorname{divgrad}U = -\frac{1}{h_\gamma h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\mu h_\nu}{h_\gamma} \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{h_\gamma h_\nu}{h_\mu} \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{h_\gamma h_\mu}{h_\nu} \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Прирівнюючи (4.16) до нуля або величини  $-\frac{\rho}{\varepsilon}$ , отримаємо відповідно рівняння Лапласа і Пуассона в криволінійних системах координат.

Нагадаємо, що в декартовій системі координат лапласіан

$$\operatorname{divgrad}U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

**Ротор.** У прямокутній системі координат

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i}_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (4.17)$$

У криволінійних системах координат

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i}_\gamma & \vec{i}_\mu & \vec{i}_\nu \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} & \frac{\partial}{\partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \nu} \\ h_\gamma H_\gamma & h_\mu H_\mu & h_\nu H_\nu \end{vmatrix}. \quad (4.18)$$

### Контрольні запитання

1. Які вирази дають можливість перерахувати координати точки А з декартової системи координат у циліндричну?
2. Наведіть вирази для розрахунку приростів довжини, площі та об'єму в довільній ортогональній криволінійній системі координат.
3. Чим відрізняються вирази для дивергенції, градієнта, рівняння Лапласа та Пуассона в декартових та ортогональних криволінійних системах координат?

## Лекція 5 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМ ПОНЯТТЯ

### 5.1. Математичний опис законів електричного струму

Сила струму визначається відомою формулою

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

де  $\Delta q$  – заряд, що переноситься крізь корисний переріз провідника за час  $\Delta t$ .

У загальному випадку, якщо казати про електромагнітні поля і заряди, що рухаються, в деякій області простору, доцільно ввести поняття сили струму таким чином. Нехай є певний об'єм  $V$ , охоплений поверхнею  $S$ , якою рухаються заряди (рис. 5.1).

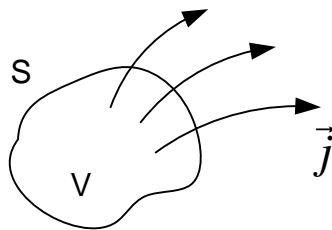


Рис. 5.1. Об'єм  $V$ , з якого тече струм

Тоді силою струму назвемо швидкість зменшення заряду  $q$  в об'ємі  $V$ :

$$I(t) = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.1)$$

Величина сили струму є позитивною, оскільки швидкість зменшення як відповідна похідна спадної функції – негативна.

Введемо поняття потоку густини струму крізь площинку  $d\vec{S}$ :

$$dI = \vec{j}d\vec{S} = jdS \cos(\vec{j}, d\vec{S}) = jdS_{\perp}.$$

За абсолютною величиною

$$j = |\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (5.2)$$

тобто це струм, віднесений до одиничної площинки, розташованої перпендикулярно до напрямку руху зарядів.

Повний струм  $I$  – це векторний потік  $\vec{j}$  крізь поверхню  $S$  :

$$I = \oiint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (5.3)$$

Якщо  $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_N$ , то  $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N$ .

Виразимо  $q$  через об'ємну густину заряду  $\rho$

$$q = \int_V \rho dV.$$

Тоді

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V -\frac{d\rho}{dt} dV.$$

З іншого боку, за теоремою Гаусса – Остроградського

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \quad (5.4)$$

отже,

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Це означає, що струм та його лінії зароджуються там, де густина заряду змінюється у часі. Там де  $\partial \rho / \partial t = 0$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \text{ та } I = \oiint_S \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (5.6)$$

Умова  $\partial \rho / \partial t = 0$  означає сталість струму, а ліва рівність означає відсутність витоків чи стоків струму та замкнутість контуру руху постійного струму, тобто безперервність струму, оскільки відсутні області додаткового виникнення чи зникнення (області витоку і стоку). Права рівність становить зміст першого закону Кірхгофа. Відповідно до цієї рівності не можна стверджувати, що струм у провіднику відсутній, а можна лише казати, що кількість струму, яка втікає в об'єм,  $V$ , дорівнює кількості струму, яка витікає з нього (рис. 5.2).

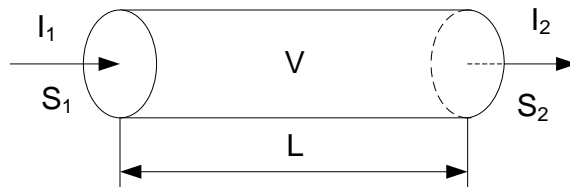


Рис. 5.2. До пояснення формули (5.6)

У циліндричному провіднику струм тече тільки крізь торцеві поверхні  $S_1, S_2$ ,

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{j} d\vec{S}.$$

Оскільки

$$d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2,$$

то

$$I_1 - I_2 = 0 \text{ та } I_1 = I_2.$$

Очевидно, що струм, який тече крізь бічну поверхню у непровідне середовище, дорівнює нулю.

## 5.2. Закон Ома

У диференціальній формі закон Ома формулюється так:

$$\vec{j} = g\vec{E}, \quad (5.7)$$

де  $g$  – питома електропровідність середовища.

Знайдемо роботу поля при переміщенні зарядів від  $S_1$  до  $S_2$  провідника, показаного на рис. 5.2.

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = U_1 - U_2, \quad (5.8)$$

де  $U_1 - U_2$  – різниця потенціалів у відповідних точках.

Після підстановки в останню формулу величини  $\vec{E} = \vec{j}/g$  з формули (5.7) та врахування того, що напрямки  $\vec{j}$  і  $d\vec{l}$  збігаються, отримаємо

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{j}}{g} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{j d\vec{l} S}{gS} = I \int_1^2 \frac{dl}{gS},$$

де, очевидно,

$$jS = I, \quad \int_1^2 \frac{dl}{gS} = R. \quad (5.9)$$

Отже, маємо закон Ома,

$$U_1 - U_2 = IR.$$



За постійної питомої електропровідності

$$R = \frac{1}{gS} \int_1^2 dl = r \frac{L}{S}, \quad (5.10)$$

де  $r = \frac{1}{g}$  – питомий опір провідника.

### 5.3. Сторонні сили та їх напруженість. Електрорушійна сила

У полі потенційних сил, як було встановлено раніше,

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Для підтримки струму необхідна наявність сторонніх сил електростатичного походження. Це можуть бути сили, породжені гальванічними процесами в джерелах електричного живлення, теплові, індукційні та ін. Вони створюють сторонню напруженість поля, що підтримує струм

$$\vec{j} = g(\vec{E} + \vec{E}_{cm}). \quad (5.11)$$

Тоді для провідника з довжиною  $L$  та поперечним перерізом  $S$

$$\int_0^L (\vec{E} + \vec{E}_{cm}) d\vec{l} = I \int_0^L \frac{dl}{gS}$$

або

$$U_1 - U_2 + EPC = IR,$$

де

$$U_1 - U_2 = \int_0^L \vec{E} d\vec{l}, \quad EPC = \int_0^L \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

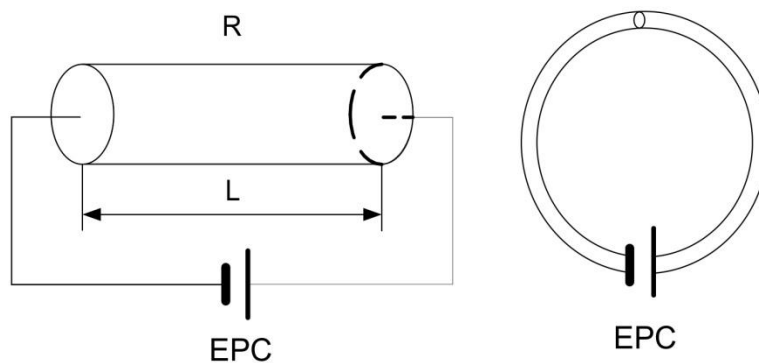


Рис. 5.3. До пояснення існування струму за рахунок сторонніх сил

У замкнутому колі (рис. 5.3)  $U_1 - U_2 = 0$  та

$$\oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} = IR_{повн},$$

де  $R_{повн}$  – повний опір замкнутого кола, що містить навантаження і внутрішні опори джерел сторонніх сил.

Умовно вважаємо, що проводи, які підводять, мають нульовий опір. Коректнішим є правий рисунок. Очевидно, сторонні сили є потенційними (оскільки інтеграл роботи із замкнутого контуру не дорівнює нулю).

#### 5.4. Вирази для роботи та потужності струму в диференціальній та інтегральній формах

Нехай при перенесенні заряду  $dq$  на відстань  $dl$  відбувається робота

$$dA = dF \cdot dl = dq \cdot E \cdot dl = dq dU,$$

де  $dU = U_l - U_{l+dl} = Edl$  – різниця потенціалів у точках  $l$  і  $l + dl$ .

Відповідно до закону Ома

$$dU = IdR,$$

де  $dR$  – опір ділянки  $dl$ .

Тоді  $dA = dqIdR$ .

Потужність

$$dP = \frac{dA}{dt} = \frac{dq}{dt} dU = IdU = I^2 dR.$$

Густина потужності (потужність, що виділяється в одиницю об'єму)

$$p = \frac{dP}{dV} = \frac{IdU}{dlS} = \vec{j} \vec{E} = \frac{j^2}{g} = E^2 g, \quad (5.12)$$

де

$$j = \frac{I}{S}, \quad E = \frac{dU}{dl}, \quad \text{або} \quad j = gE, \quad E = \frac{j}{g}.$$

Тут враховано, що напрямки  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  збігаються.

Тоді

$$P = \int_V p dV = \int_V j E dV = \int_V \frac{j^2}{g} dV = \int_V E^2 g dV. \quad (5.13)$$

## 5.5. Змінний струм у колі. Струм зміщення

Умова

$$\operatorname{div} j = 0$$

означає замкнутість ліній постійного струму. Що стосується змінного струму, то у зв'язку зі зміною густини заряду в кожній точці має місце умова

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5.14)$$

тобто можливі миттєві витoki та стоки зарядів, а в колах протікання струмів можуть бути розриви (наприклад, при переході з пластин конденсаторів у діелектричне середовище між ними). Однак і коло змінного струму можна умовно замкнути, маючи (як у конденсаторі) механічно розірване коло. Це можна зробити в такий спосіб. Раніше було отримано формулу

$$\rho = \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E}.$$

Тоді відповідно (5.14)

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E}) = -\operatorname{div} \left( \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

або

$$\operatorname{div} j + \operatorname{div} \left( \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \left( \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Позначимо

$$j_{zm} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.15)$$

тоді

$$\operatorname{div} \vec{j}_{повн} = 0,$$

де  $\vec{j}_{повн} = \vec{j} + \vec{j}_{zm}$ .

Струм (5.15) називають струмом зміщення. Це не струм зарядів. Однак змінне поле в середовищі, наприклад, у середовищі між пластинами конденсатора (рис. 5.4) за рахунок своєї зміни в часі забезпечує рух зарядів у провідниках, що підводять до пластин конденсатора.

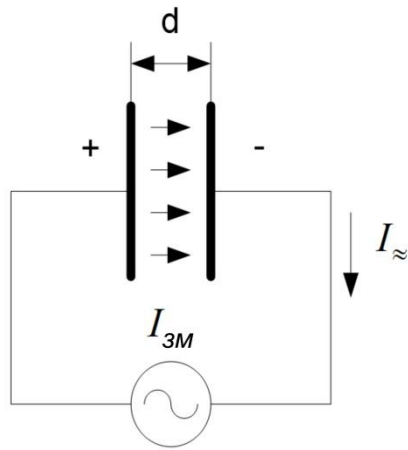


Рис. 5.4. Струм зміщення в ємності

У цьому колі тече єдиний струм  $I_{зм}$ . Але в провідниках, що підводять, це струм провідності, який між пластинами конденсатора переходить у струм зміщення:

$$I_{\approx} = I_{зм} = j_{зм} S = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} S = \varepsilon_a S \frac{\partial}{\partial t} (E) = \varepsilon_a S \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{U}{d} \right) = \frac{\varepsilon_a S}{d} \frac{\partial U}{\partial t},$$

оскільки ємність  $C = \frac{\varepsilon_a S}{d}$ , то отримуємо відому формулу струму, що протікає крізь конденсатор,  $I_{зм} = C \frac{dU}{dt}$ .

### Контрольні запитання

1. Який вираз описує закон Ома в диференціальній формі?
2. У чому полягає фізичний сенс струму зміщення?
3. Яка формула описує зв'язок сторонньої напруженості поля та струму у замкнутому колі?

## Лекція 6 ТЕОРІЯ ПОСТІЙНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 6.1. Вектор магнітної індукції

Магнітне поле характеризується напруженістю  $\vec{H}$  та вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H},$$

де  $\mu_a$  – абсолютна магнітна проникність середовища. Для довільного середовища  $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ , де  $\mu_r$  – відносна магнітна проникність.

У системі СІ для вакууму  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ , де  $\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1} = \text{Вб} \cdot \text{А}^{-1}$  – одиниця індуктивності Генрі (Гн).

Магнітна індукція  $\vec{B}$  вимірюється в теслах (Тл):

$$1\text{Тл} = 1\text{Вб} / \text{м}^2 = 1\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2} = 1\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{Кл}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} = 1\text{Н} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Одиниця напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  – А/м.

На відміну від електростатичного поля, в якому  $\text{div} \vec{D} = \rho$ , у магнітному полі

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

оскільки силові лінії магнітного поля або замкнуті, або йдуть у нескінченність.

Величину  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  називають потоком вектора індукції крізь поверхню S. Розмір потоку вимірюється у веберах,  $\text{dim} \Phi = \text{Вб} = 1\text{В} \cdot 1\text{с}$ . Потік дорівнює 1 веберу, якщо при його рівномірному спаданні до нуля в контурі виникає ЕРС в 1В.

Потік крізь замкнуту поверхню  $\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ , оскільки магнітних зарядів одного знаку у природі немає (рівність Гаусса – Остроградського).

### 6.2. Закон Біо – Савара

За законом Біо – Савара напруженість магнітного поля  $d\vec{H}$ , що створюється струмом із густиною  $\vec{j}$  в об'ємі  $dV$  (рис. 6.1), визначається формулою

$$d\vec{H} = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{4\pi r^3} dV. \quad (6.1)$$

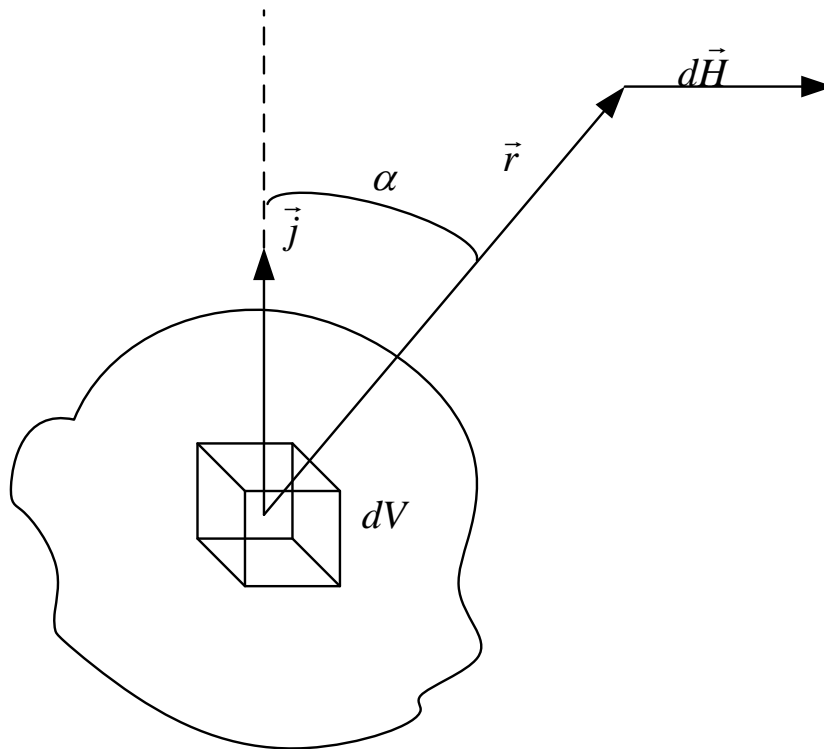


Рис. 6.1. До закону Біо – Савара

Тут  $\vec{j} \times \vec{r}$  – векторний добуток векторів  $\vec{j}$  і  $\vec{r}$ :

$$|\vec{j}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha = jr \sin \alpha.$$

За абсолютною величиною

$$dH = \frac{j \sin \alpha}{4\pi r^2} dV,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{j}$  і  $\vec{r}$ . З цієї формули видно, що максимальна напруженість поля має місце  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  і дорівнює нулю, якщо  $\vec{r}$  збігається з віссю струму.

Враховуючи, що в розглянутій системі координат  $(x, y, z)$ ,  $\vec{j} = \|j_x, j_y, j_z\|$ ,  $\vec{r} = \|x, y, z\|$ , векторний добуток можна записати у вигляді

$$\vec{j} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ j_x & j_y & j_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (j_y z - j_z y) \vec{i}_x - (j_x z - j_z x) \vec{i}_y + (j_x y - j_y x) \vec{i}_z, \quad |\vec{j} \times \vec{r}| = jr \sin \alpha. \quad (6.2)$$

Очевидно, що результівна напруженість поля

$$\vec{H} = \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{4\pi r^3} dV. \quad (6.3)$$

Якщо це звичайний провідник, то

$$\vec{H} = \int_S \int_L \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{4\pi \vec{r}^3} dS dl = \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi \vec{r}^3} \int_S j dS = \int_L I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi \vec{r}^3}. \quad (6.4)$$

### 6.3. Циркуляція магнітного поля

Циркуляцією напруженості магнітного поля називається інтеграл по замкнутому контуру

$$\oint \vec{H} d\vec{l}. \quad (6.5)$$

Якби існувало поняття магнітного заряду за аналогією з електричним зарядом, то інтеграл (6.5) визначав би величину роботи поля, яка виконується при переміщенні такого магнітного заряду цим шляхом.

У електричному полі аналогічна циркуляція дорівнює нулю, тобто  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

У полі постійних магнітів циркуляція напруженості магнітного поля також дорівнює нулю. Не дорівнює нулю циркуляція постійного магнітного поля лише в тому випадку, коли замкнутий контур охоплює пронизувальний струм.

Розрахуємо циркуляцію поля у випадку, коли контур інтегрування оточено постійним струмом. Спочатку розрахуємо саме поле  $H$  з відривом  $R$ , створюване прямолінійним провідником, по контуру тече постійний струм  $I$  (рис. 6.2, 6.3).

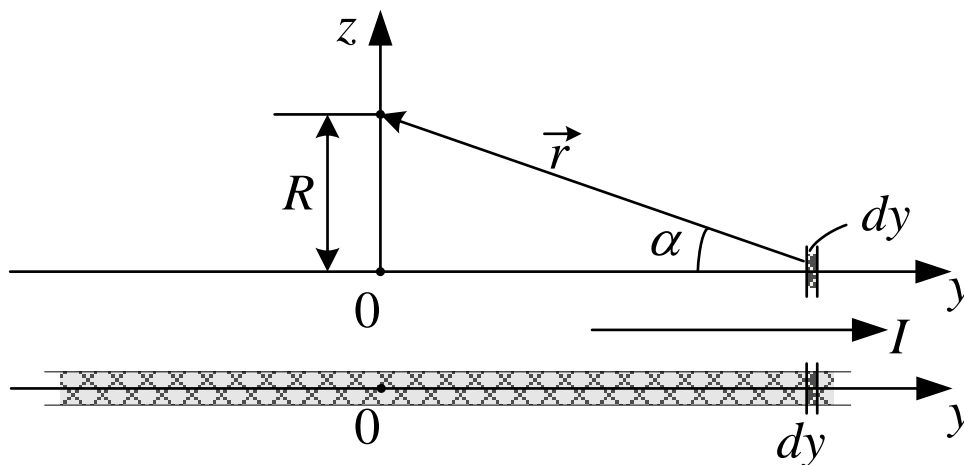


Рис. 6.2. До розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника

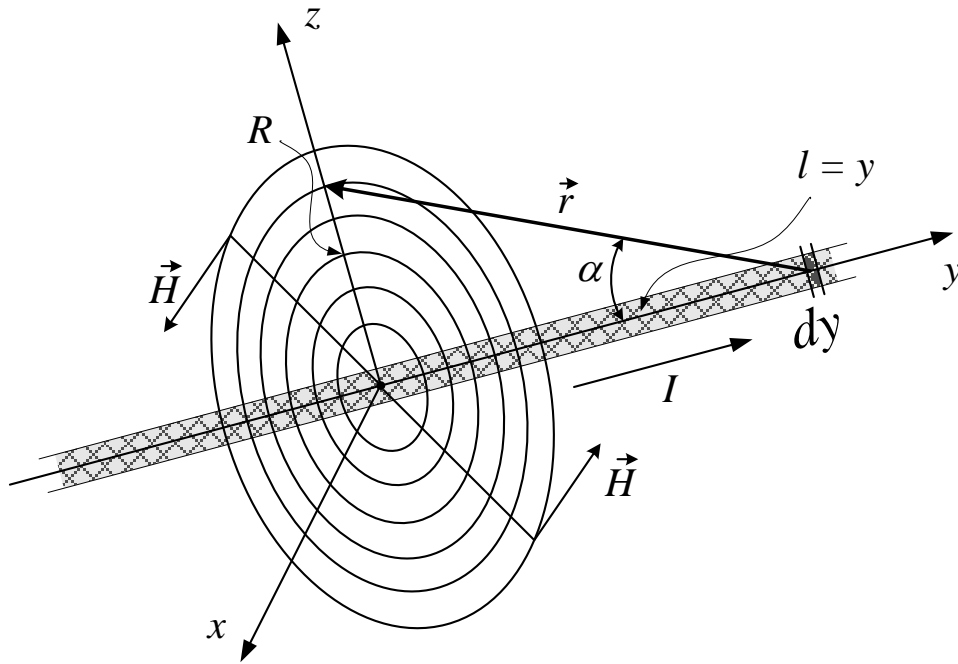


Рис. 6.3. Магнітне поле лінійного провідника

Струм тече вздовж лінії  $l$ , яка спрямована вздовж осі  $y$ . Відповідно до формули (6.4) для закону Біо – Савара маємо

$$H = I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \sin \alpha}{4\pi r^3} dy = \frac{IR}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(\sqrt{R^2 + y^2})^3} = \frac{I}{4\pi R} \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{I}{2\pi R}. \quad (6.6)$$

Тут

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(\sqrt{R^2 + y^2})^3} = \frac{y}{R^2 \sqrt{R^2 + y^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{\sqrt{R^2 + y^2}} = \frac{\pm y}{|y|} = 1.$$

Тоді отримаємо

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad (6.7)$$

Оскільки вектор  $\vec{H}$  у точці  $R$  перпендикулярний площині  $zOy$ , то очевидно, через радіальну симетрію силовими лініями в будь-якій площині, перпендикулярній до лінії струму  $I$ , будуть кола (рис. 6.4).

Розглянемо скалярний добуток

$$\vec{H} d\vec{l} = \vec{H} (d\vec{l}_R + d\vec{l}_\varphi). \quad (6.8)$$

Очевидно, що  $\vec{H} d\vec{l}_R = 0$ , оскільки вектори  $\vec{H}$  і  $d\vec{l}_R$  взаємно перпендикулярні.



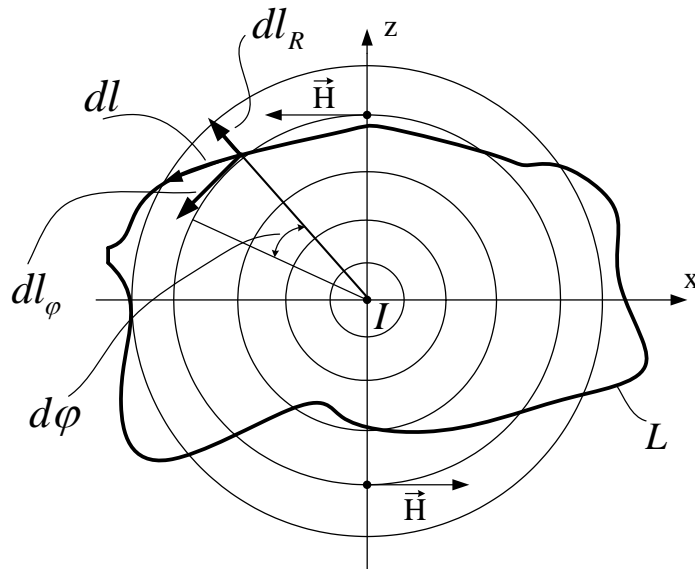


Рис. 6.4. Контур інтегрування охоплює струм  $I$

Тоді  $\vec{H}d\vec{l}_\varphi = Hdl_\varphi = HRd\varphi$  з урахуванням (6.7)

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \int_\varphi \frac{I}{2\pi R} R d\varphi = I. \quad (6.9)$$

У загальному випадку

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \sum I, \quad (6.10)$$

тобто циркуляція напруженості магнітного поля дорівнює сумі струмів, що пронизують поверхню, охоплену замкнутим контуром. Неважко довести, що якщо контур не охоплює струм (рис. 6.5), то  $\oint \vec{H}d\vec{l} = 0$ .

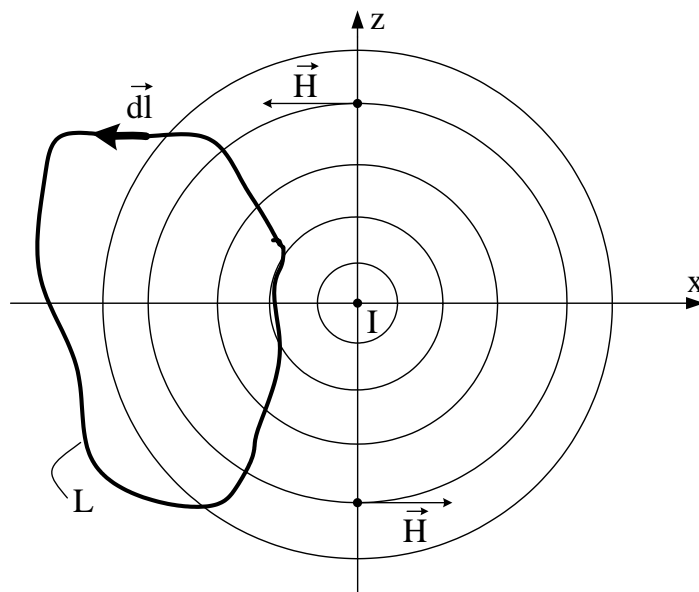


Рис. 6.5. Струм не проходить усередині контуру інтегрування

Формула (6.10) для теорії магнітного поля має таке ж значення, як і рівність Гаусса – Остроградського для теорії електричного поля.

### Контрольні запитання

1. В яких одиницях вимірюється магнітна індукція  $\vec{B}$ ?
2. Який закон описує напруженість магнітного поля  $d\vec{H}$ , що створюється струмом із густиною  $\vec{j}$  в об'ємі  $dV$ ? Визначте всі його складові та їх одиниці вимірювання.
3. Якою інтегральною характеристикою описується магнітне поле навколо провідника зі струмом  $I$ ?

## Лекція 7 ПОНЯТТЯ РОТОРА ТА ТЕОРЕМА СТОКСА

### 7.1. Визначення поняття векторного ротора

Поняття циркуляції дає змогу визначати інтегральні характеристики поля. Поняття ротора дає можливість визначити ці характеристики в диференціальній формі, описати поля в кожній окремій точці простору – точці в деякому нескінченно малому об'ємі.

Ротор вектора  $\vec{A}$  – це вектор  $\vec{R}$ ,

$$\vec{R} = \text{rot}\vec{A}, \quad (7.1)$$

такий, що його проєкція в заданій точці простору на нормаль до деякої довільної плоскої площинки визначається виразом

$$R_n = \text{rot}_n A = \lim_{S \rightarrow 0} \left| \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{S} \right|, \quad (7.2)$$

де  $\oint \vec{A} d\vec{l}$  – циркуляція вектора  $\vec{A}$  по замкнутому контуру, що охоплює задану точку на вибраній плоскій площинці, орієнтація якої задана вектором нормалі  $\vec{n}$  (рис. 7.1);  $S$  – площа, охоплена замкнутим контуром інтегрування. В граничному випадку ця площа прямує до нуля. Природно, що для того самого вектора  $\vec{R}$  можна вибрати нескінченну кількість таких площинок з різними орієнтаціями вектора нормалі  $\vec{n}$ . Відповідно, і проєкції  $R_n$  будуть різні.

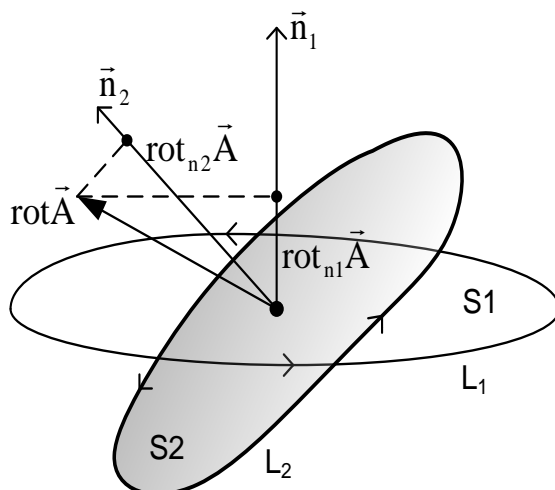


Рис. 7.1. До визначення ротора

Оскільки в тривимірному просторі вектор характеризується трьома координатами, для повного опису вектора  $\vec{R}$  достатньо знайти три проєкції його на осі координат  $x, y, z$ . Відповідно, площинки на околі заданої точки мають бути перпендикулярні до цих осей.

Для знаходження проєкції ротора на вісь  $x$  виберемо прямокутну площинку, перпендикулярну до цієї осі, і знайдемо циркуляцію по її контуру навколо точки  $P$  (рис. 7.2).

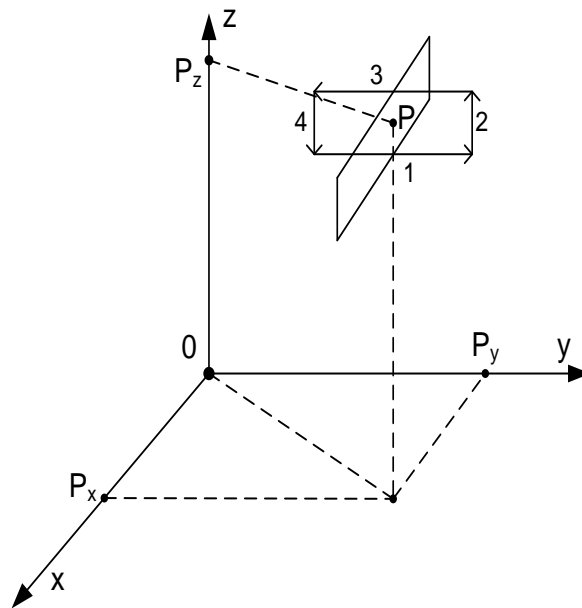


Рис. 7.2. Визначення проєкцій вектора  $\vec{R} = \text{rot} \vec{A}$

Спочатку знайдемо проєкцію ротора

$$R_x = \text{rot}_x A = \lim_{dS \rightarrow 0} \left| \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{dS} \right|. \quad (7.3)$$

Для цього виберемо нескінченно малу площинку  $dS = dydx$ , перпендикулярну до напрямку  $OX$ , з контуром інтегрування (1, 2, 3, 4), який охоплює цю площинку. Цей контур розташований паралельно площині  $ZOY$ . Циркуляція вектора  $\vec{A}$  за цим контуром

$$\begin{aligned} \oint \vec{A} d\vec{l} &= A_{1y} dy + A_{2z} dz - A_{3y} dy - A_{4z} dz = \\ &= (A_{1y} - A_{3y}) dy + (A_{2z} - A_{4z}) dz. \end{aligned} \quad (7.4)$$

При граничному переході ці різниці набудуть такого вигляду:

$$A_{1y} - A_{3y} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} dz; \quad A_{2z} - A_{4z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy.$$

Тоді

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dx dy, \quad (7.5)$$

$$rot_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Аналогічно знаходимо інші проєкції ротора, унаслідок чого маємо

$$rot \vec{A} = \left\| rot_x \vec{A}, rot_y \vec{A}, rot_z \vec{A} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\|. \quad (7.6)$$

Розрахунок ротора вектора у криволінійній системі координат зображено на рис. 7.3.

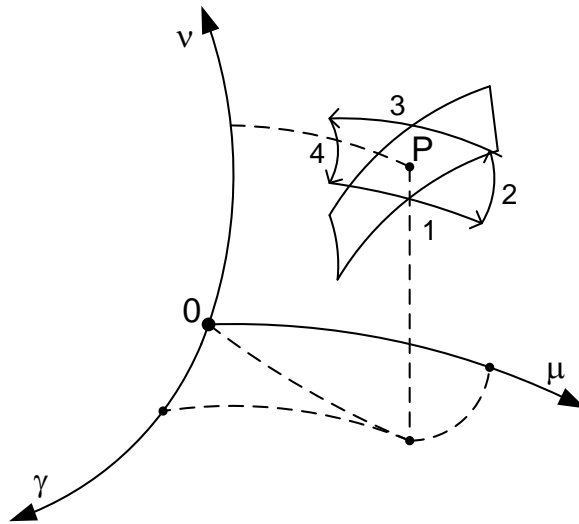


Рис. 7.3. До розрахунку ротора вектора в криволінійних координатах

Інтеграл за контуром, паралельним координатній поверхні  $\nu 0\mu$ ,

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = A_{\mu 1} h_{\mu 1} d\mu + A_{\nu 2} h_{\nu 2} d\nu - A_{\mu 3} h_{\mu 3} d\mu - A_{\nu 4} h_{\nu 4} d\nu =$$

$$= (A_{\mu 1} h_{\mu 1} - A_{\mu 3} h_{\mu 3}) d\mu + (A_{\nu 2} h_{\nu 2} - A_{\nu 4} h_{\nu 4}) d\nu = \quad (7.7)$$

$$= -\frac{\partial(A_{\mu} h_{\mu})}{\partial \nu} d\nu d\mu + \frac{\partial(A_{\nu} h_{\nu})}{\partial \mu} d\nu d\mu.$$

Елемент площі

$$dS = h_{\mu} h_{\nu} d\mu d\nu.$$

Тоді

$$R_\gamma = \text{rot}_\gamma \vec{A} = \lim_{dS \rightarrow 0} \left| \frac{\oint \vec{A} d\vec{l}}{dS} \right| =$$

$$= \frac{1}{h_\mu h_\nu} \left[ \frac{\partial(A_\nu h_\nu)}{\partial \mu} - \frac{\partial(A_\mu h_\mu)}{\partial \nu} \right]. \quad (7.8)$$

Аналогічно отримаємо

$$R_\mu = \text{rot}_\mu \vec{A} = \frac{1}{h_\nu h_\gamma} \left[ \frac{\partial(A_\gamma h_\gamma)}{\partial \nu} - \frac{\partial(A_\nu h_\nu)}{\partial \gamma} \right], \quad (7.9)$$

$$R_\nu = \text{rot}_\nu \vec{A} = \frac{1}{h_\gamma h_\mu} \left[ \frac{\partial(A_\mu h_\mu)}{\partial \gamma} - \frac{\partial(A_\gamma h_\gamma)}{\partial \mu} \right]. \quad (7.10)$$

*Примітка:* неважко довести, що

$$\text{rot grad} U = 0,$$

$$\text{div rot} \vec{A} = 0. \quad (7.11)$$

Перша рівність свідчить про те, що в потенційному полі відсутні вихори, що еквівалентно доведеному факту, що в такому полі циркуляція напруженості електростатичного поля (інтеграл  $\oint \vec{E} d\vec{l}$ ) дорівнює нулю. Друга рівність свідчить, що вихори мають соленоїдальний характер, тобто або замкнуті, або прагнуть до нескінченності.

## 7.2. Теорема Стокса

Формулу (7.2), визначальну для поняття ротора, можна записати так:

$$R_n = \text{rot}_n \vec{A} = \frac{d \left[ \oint \vec{A} d\vec{l} \right]}{dS}, \quad (7.12)$$

де

$$d \left[ \oint \vec{A} d\vec{l} \right] = \text{rot}_n A \cdot dS = \left| \text{rot} \vec{A} \right| \cdot dS \cdot \cos(\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) =$$

$$= \text{rot} \vec{A} d\vec{S} = \vec{R} \cdot d\vec{S}. \quad (7.13)$$

Інтегруючи ліву та праву частини, тобто переходячи від нескінченно малої площі до кінцевої площі, що охоплюється контуром L, отримаємо

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \vec{R} d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (7.14)$$

Ця рівність стверджує, що циркуляція вектора  $\vec{A}$  замкнутого контуру  $L$  дорівнює потоку ротора цього вектора крізь поверхню  $S$ , охоплювану контуром  $L$ . Це твердження є формулюванням теореми Стокса.

### 7.3. Зв'язок магнітного поля та струму в диференціальній формі

Відповідно до теореми про циркуляцію магнітного поля

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (7.15)$$

де  $I$  – сумарний струм, що пронизує замкнутий контур інтегрування  $L$ . Цей струм у загальному випадку розподілений у просторі із густиною  $\vec{j}$  так, що

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (7.16)$$

Тобто струм  $I$  дорівнює потоку вектора  $\vec{j}$  крізь поверхню  $S$ , що охоплюється контуром  $L$ .

Отже,

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (7.17)$$

З іншого боку, відповідно до теореми Стокса

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (7.18)$$

і

$$\int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (7.19)$$

тобто

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (7.20)$$

Унаслідок розрахунків отримаємо важливу рівність і твердження, що ротор (вихор) вектора  $\vec{H}$  дорівнює чисельно значенню густини струму  $i$ , як вектор, збігається з напрямком цього струму.

При розрахунках полів  $\vec{H}$  та струмів  $\vec{j}$  часто поряд із рівнянням (7.20) розглядають рівняння

$$\text{div} \mu \vec{H} = 0, \quad (7.21)$$

яке підтверджує той факт, що вектор магнітної індукції безперервний і що магнітних зарядів однієї полярності у природі немає.

### Контрольні запитання

1. Ротор вектора є диференціальною чи інтегральною характеристикою полів?
2. Який величині дорівнюють  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U$  і  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$  ?
3. Наведіть математичний запис та фізичний зміст теореми Стокса.



## Лекція 8 ВЕКТОРНИЙ ОПЕРАТОР НАБЛА

### 8.1. Загальне визначення оператора $\nabla$ (набла)

За допомогою цього оператора можна порівняно легко відтворити основні формули теорії поля для градієнта, дивергенції, ротора, рівняння Лапласа та ін. Оператор набла позначається символом  $\nabla$  і має вигляд

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.1)$$

Формально застосовуючи символічні операції звичайного скалярного та векторного добутків цього вектора до функцій, що описують скалярні та векторні поля, можна легко отримати основні формули їх аналізу.

Оператор набла є оператором диференціювання. Під час застосування цього оператора до виконання функцій зберігаються всі основні властивості похідної як похідної роботи функцій. Однак на відміну від звичайних простих похідних скалярних функцій при застосуванні оператора  $\nabla$  до векторних функцій необхідно в деяких випадках дотримуватися порядку проходження похідних:

– похідна від добутку скалярної та векторної функцій

$$(\vec{f})' = (u\vec{v})' = u\vec{v}' + u'\vec{v}; \quad (8.2)$$

– похідна від скалярного добутку векторних функцій

$$(f)' = (\vec{u}\vec{v})' = \vec{u}\vec{v}' + \vec{u}'\vec{v}; \quad (8.3)$$

– похідна від векторного добутку функцій

$$(\vec{f})' = (\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u} \times \vec{v}' + \vec{u}' \times \vec{v}. \quad (8.4)$$

Зауважимо: якщо у перших двох випадках порядок розташування співмножників не має значення, то у третьому випадку необхідно враховувати, що

$$\vec{u} \times \vec{v}' = -\vec{v}' \times \vec{u}. \quad (8.5)$$

### 8.2. Градієнт

Цю формулу отримуємо простим формальним перемноженням оператора  $\nabla$  та потенціалу  $u(x, y, z)$ :

$$\text{gradu} = \nabla u = \left( \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \vec{i}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8.6)$$

Але слід пам'ятати, що  $\nabla$  – це знак застосування оператора до функції  $u(x, y, z)$  і перемноження тут здійснюється лише символічно, тобто формально.

### 8.3. Дивергенція

Отримуємо внаслідок виконання операції формального скалярного добутку оператора  $\nabla$  та, наприклад, вектора електричної індукції  $\vec{D}$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla\vec{D} = \left( \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i}_x D_x + \vec{i}_y D_y + \vec{i}_z D_z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \quad (8.7)$$

### 8.4. Ротор

Отримуємо внаслідок застосування формальної операції векторного добутку оператора  $\nabla$  та, наприклад, вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} = \nabla \times \vec{H} &= \left( \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{j}_x H_x + \vec{j}_y H_y + \vec{j}_z H_z) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{i}_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

У криволінійних системах координат

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i}_\gamma & \vec{i}_\mu & \vec{i}_\nu \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} & \frac{\partial}{\partial \mu} & \frac{\partial}{\partial \nu} \\ h_\gamma H_\gamma & h_\mu H_\mu & h_\nu H_\nu \end{vmatrix}. \quad (8.9)$$

Розглянемо кілька корисних формул.

$$1. \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times (\nabla u). \quad (8.10)$$

Цю формулу легко отримати на підставі розглянутих вище формул (8.6) та (8.8).

Оскільки вектор  $\nabla$  і вектор  $\nabla u$  мають однакові напрямки, очевидно, що

$$\text{rot grad } u = 0. \quad (8.11)$$

2. На підставі формул (8.7) та (8.8) маємо

$$\text{div rot } \vec{A} = \nabla(\nabla \times \vec{A}). \quad (8.12)$$

Оскільки вектор  $\nabla$  ортогональний до вектора  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$  з властивостей векторного добутку, а з властивостей скалярного добутку  $\nabla \vec{B} = |\nabla| B \cos(\nabla, B)$ , то

$$\text{div rot } \vec{A} = 0. \quad (8.13)$$

3. У теорії поля має місце операція

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}). \quad (8.14)$$

З огляду на відому формулу векторного аналізу

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - (\vec{A}\vec{B})\vec{C},$$

де  $(\vec{A}\vec{C})$  і  $(\vec{A}\vec{B})$  – скалярні добутки, знаходимо, що

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla(\nabla \vec{A}) - (\nabla \nabla) \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}. \quad (8.15)$$

Тут скалярний добуток

$$\nabla^2 = \left( \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (8.16)$$

а

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}.$$

4. Як оператор похідної

$$\nabla(u_1 u_2) = u_1 \nabla u_2 + u_2 \nabla u_1, \quad (8.17)$$

або

$$\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1.$$

Тут  $u_1$  і  $u_2$  – скалярні поля, тобто  $u_1 = u_1(x, y, z)$ ,  $u_2 = u_2(x, y, z)$ .

*Примітка:* кількість змінних, від яких залежать поля  $u$ , може бути більшою за три.

Враховуючи правила диференціювання добутку функцій (8.4)–(8.6), отримаємо

$$5. \operatorname{div}(u\vec{A}) = \nabla(u\vec{A}) = u\nabla\vec{A} + \nabla u\vec{A} = u\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{grad}u\vec{A}. \quad (8.18)$$

$$6. \operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \times \vec{A}) + \vec{A}(\vec{B} \times \nabla).$$

Вираз  $\vec{B} \times \nabla$  сенсу не має, його можна замінити формально виразом  $(\vec{B} \times \nabla) = -(\nabla \times \vec{B})$ . Тоді отримаємо, що

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot}\vec{B}. \quad (8.19)$$

$$7. \operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \nabla \times (\varphi\vec{A}) = \varphi\nabla \times \vec{A} + \nabla\varphi \times \vec{A} = \varphi \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{A}. \quad (8.20)$$

### Контрольні запитання

1. У чому полягає сенс використання оператора набла в теорії поля?
2. Подайте математичні вирази для градієнта, ротора та дивергенції за допомогою оператора набла.

## Лекція 9 ТЕОРІЯ ПОСТІЙНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 9.1. Рівняння Максвелла для електростатичних і магнітостатичних полів

Раніше було встановлено, що

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{або} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Оскільки електростатичне поле є потенційним, то  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$  і

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Пару рівнянь

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \tag{9.2}$$

називають рівняннями Максвелла, що описують постійні електростатичні поля.

Нехай потрібно розв'язати пряму задачу визначення напруженості поля за заданим розподілом зарядів.

Зважаючи на те, що напруженість поля  $\vec{E}$  пов'язана з його потенціалом  $u$  рівнянням

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} u,$$

яке тут отримуємо формально з (9.2), тому що  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$  (див. (8.11)) і, підставляючи цей вираз у рівняння (9.1), отримаємо рівняння Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

або

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \tag{9.3}$$

Розв'язком цього рівняння буде рівність

$$u = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_a r} \rho dv. \tag{9.4}$$

Тоді

$$\vec{E} = -\text{grad} \left( \int_V \frac{1}{\epsilon_a} \frac{\rho}{r} dv \right). \quad (9.5)$$

Оскільки змінні спостереження та змінні інтегрування – це різні змінні, то операцію градієнта як операцію диференціювання за параметром, що не співпадає зі змінною інтеграцією, можна внести під знак інтеграла. Тоді

$$\vec{E} = -\int \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad} \left( \frac{\rho}{r} \right) dv. \quad (9.6)$$

На прикладі використання функцій однієї змінної внесення під знак інтеграла має такий вигляд:

$$\varphi(x_1) = \frac{d}{dx_1} \int \psi(x) y(x - x_1) dx = \int \psi(x) \frac{d}{dx_1} y(x - x_1) dx. \quad (9.7)$$

Якщо спостереження поля  $\vec{E}$  здійснюється у тих точках простору, де відсутні заряди, то

$$\vec{E} = -\int \frac{1}{\epsilon_a} \rho \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dv. \quad (9.8)$$

Оскільки

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \text{grad} r = -\frac{1}{r^3} \vec{r}, \quad (9.9)$$

де

$$\text{grad} r = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad \left( \frac{1}{r} \right)' = -\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}, \quad \left| \frac{\vec{r}}{r} \right| = 1,$$

то

$$\vec{E} = \int \frac{\rho \vec{r}}{\epsilon_a r^3} dv. \quad (9.10)$$

Для точкового заряду

$$\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_a} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (9.11)$$

Отже, тут закон Кулона отримано як розв'язок рівнянь Максвелла (9.1), (9.2). Зауважимо, що всі викладки здійснювалися вже формально математично у процесі розв'язання системи рівнянь Максвелла.

Розглянемо тепер за аналогією рівняння Максвелла та його розв'язання для магнітостатичного поля.

Цими рівняннями є вже отримані співвідношення

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (9.12)$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0. \quad (9.13)$$

Перше рівняння свідчить, що роторами (вихорами) поля є густини струмів, навколо яких замикаються лінії магнітного поля. Друге рівняння свідчить про замкнутість ліній магнітного поля, тобто про їх соленоїдальний характер, а також про відсутність магнітних зарядів.

Це диференціальне рівняння у частинних похідних, невідомими у яких за заданих  $\vec{j}$  є компоненти вектора магнітного поля  $H_x, H_y, H_z$ . Розглянемо методику їх визначення, тобто методику розв'язання цих рівнянь.

На підставі формули  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$  (див. (8.13) та (9.13)) запишемо

$$\mu_a \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (9.14)$$

Це дає змогу знайти компоненти поля  $H_x, H_y, H_z$  після попереднього визначення складових вектора  $\vec{A} = \|A_x, A_y, A_z\|$ . Цей вектор називають векторним потенціалом поля.

Оскільки поле  $\vec{H}$  соленоїдальне (вихрове), то вектор  $\vec{A}$  також задовольняє умову

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (9.15)$$

(оскільки в соленоїдальному полі немає місця ні для  $\vec{H}$ , ні для  $\vec{A}$ , ні стоків, ні витоків).

Рівняння (9.12) з урахуванням (9.14) набуде вигляду

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_a \vec{j}.$$

На підставі (8.15)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla(\nabla \vec{A}) - (\nabla \nabla) \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.$$

Тоді маємо

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_a \vec{j}. \quad (9.16)$$

Перший доданок дорівнює нулю на підставі (9.15). Тоді компоненти векторного потенціалу можна знайти з диференціального рівняння

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j}. \quad (9.17)$$

У координатній формі це рівняння можна записати так:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a j_z. \quad (9.18)$$

Кожне з цих рівнянь зовні подібне до рівняння для скалярного потенціалу (9.3). Подібними будуть і розв'язки:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{j_x}{r} dv, \quad A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{j_y}{r} dv, \quad A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{j_z}{r} dv. \quad (9.19)$$

У векторній формі ці рівняння набудуть вигляду

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dv. \quad (9.20)$$

Отже, знайдемо векторний потенціал поля  $\vec{A}$ . Само поле  $\vec{H}$ , враховуючи, що  $\mu_a \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ , знаходимо за формулою

$$\vec{H} = \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dv \right). \quad (9.21)$$

Як і у формулах (9.5) і (9.7), тут слід розрізняти змінні спостереження (координати  $(x, y, z)$  та змінні інтегрування (такі ж  $(x, y, z)$ ) за відповідними іншими точками простору). Тоді оператор ротора як диференціальний оператор, що діє за змінними спостереженнями, можна внести під знак інтеграла як добуток за параметром:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) dv = \int d\vec{H}. \quad (9.22)$$

На підставі формули (див. (8.20))

$$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \nabla \times (\varphi \vec{A}) = \varphi \nabla \times \vec{A} + \nabla \varphi \times \vec{A} = \varphi \text{rot} \vec{A} + \text{grad} \varphi \times \vec{A};$$

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{j} + \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{j}. \quad (9.23)$$

Вважаючи, що у точках спостереження струми відсутні, тобто  $\text{rot} \vec{j} = 0$  (операція, що здійснюється для поля за змінними спостереженнями), а також враховуючи, що

$$\text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (9.24)$$



отримаємо

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{j} \, dv = -\frac{1}{4\pi} \int_V \vec{j} \times \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \, dv = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} \, dv, \quad (9.25)$$

де

$$dH = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{cr^3} \, dv, \quad (9.26)$$

що відповідає закону Біо – Савара.

Зауважимо, що цей закон уже не постульований, як раніше, а виведений математично як результат розв'язання системи рівнянь Максвелла (9.12) та (9.13).

### Контрольні запитання

1. Наведіть рівняння Максвелла, що описують електростатичні поля.
2. Наведіть рівняння Максвелла, що описують магнітостатичні поля.
3. Які характеристики постійних електромагнітних полів можуть бути отримані з наведених у лекції рівнянь Максвелла?

## Лекція 10 ТЕОРІЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 10.1. Перше рівняння Максвелла

Ця теорія виходить з рівнянь Максвелла. Її основоположниками були Фарадей та Максвелл. Щоправда, вони вважали, що середовищем поширення електромагнітних хвиль є ефір. Максвелл узагальнив теорію, створену Фарадеем, і ввів 1846 року рівняння, названі рівняннями Максвелла. Ці рівняння не вимагали поняття ефіру, а електромагнітне поле було визначено як особливий вид матерії. Раніше наведені рівняння Максвелла для стаціонарних електростатичних і магнітостатичних полів можна розглядати як окремий випадок більш загальних рівнянь Максвелла, справедливих для опису як постійних, так і змінних електромагнітних полів.

Перше рівняння Максвелла для постійного струму (див. лекцію 9) має вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (10.1)$$

Для змінних полів необхідно враховувати не тільки струм провідності, а й струм зміщення, що утворюють у сумі повний струм

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j} + j_{\text{зм}} = \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.2)$$

У діелектричному середовищі, в якому провідність відсутня ( $q=0$ ),

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10.3)$$

тобто магнітне поле обумовлено лише наявністю струму зміщення, точніше, наявністю змінного електричного поля  $\vec{E}$ . Це рівняння є першим рівнянням Максвелла у диференціальній формі.

Оскільки ротор – це оператор у частинних похідних, він пов'язує зміни магнітного поля  $\vec{H}(x, y, z)$  у просторі й у часі зі змінами електричного поля  $\vec{E}(x, y, z)$ .

Оскільки

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}_x \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \quad (10.4)$$

то в координатній формі перше рівняння Максвелла можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = gE_x + \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = gE_y + \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = gE_z + \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{cases} \quad (10.5)$$

Знайдемо потік вектора  $rot\vec{H}$  крізь поверхню  $S$

$$\int_S rot\vec{H} d\vec{s} = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{s} = I + I_{3m} = I_{новн}, \quad (10.6)$$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s}, \quad I_{3m} = \int_S \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}. \quad (10.7)$$

За теоремою Стокса

$$\int_S rot\vec{H} d\vec{s} = \oint_L \vec{H} d\vec{l},$$

де  $L$  – замкнутий контур, що охоплює поверхню  $S$ .

Тоді

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{новн} = I + \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}. \quad (10.8)$$

Це рівняння є першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі. У постійному магнітному полі, якщо струм провідності дорівнює нулю,  $I = 0$  або контур не охоплює лінії струму, то циркуляція магнітного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

У змінному полі в цьому випадку

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \quad (10.9)$$

тобто нерівність нулю циркуляції магнітного поля обумовлена наявністю струму зміщення, що приводить до зміни потоку вектора електричної індукції крізь поверхню  $S$ , обмежену контуром  $L$ .

## 10.2. Друге рівняння Максвелла

Це рівняння можна отримати в такий спосіб. Згідно з законом електромагнітної індукції, ЕРС індукції в замкнутому провідному контурі дорівнює взятій з протилежним знаком похідній від потоку магнітного поля за часом крізь поверхню, обмежену цим контуром:

$$EPC = -\frac{\partial \Phi_H}{\partial t}, \quad \Phi_H = \int_S \vec{B} d\vec{s} = \int_S \mu_a \vec{H} d\vec{s}. \quad (10.10)$$

З іншого боку, стороння ЕРС, що збігається за розмірністю з потенціалом або з різницею потенціалів, в електричному полі має вигляд

$$EPC = \int_L \vec{E} d\vec{l}.$$

Така ЕРС наводилася б у замкнутому провідному контурі  $L$ .

Тоді формулу (10.10) можна записати у такому вигляді:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_H}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s}. \quad (10.11)$$

Отримане рівняння є другим рівнянням Максвелла в інтегральній формі. Це рівняння має більш загальний характер і не вимагає безпосередньо обов'язкової наявності провідного контуру  $L$  в області простору, що розглядається.

Відповідно до теореми Стокса

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{s}.$$

Тоді

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}. \quad (10.12)$$

Якщо вважати, що поверхня  $S$ , яка охоплює контур  $L$ , є довільною, то в такому випадку

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (10.13)$$

Це рівняння є другим рівнянням Максвелла у диференціальній формі. Другі рівняння Максвелла, як інтегральної, так і диференціальної форми свідчать, що зміни магнітного поля породжують виникнення змінного електричного поля. Перші рівняння Максвелла свідчать, що зміни електричного поля приводять до виникнення змінного у часі магнітного поля. І те, й інше поля мають вихровий характер ( $\text{rot} \neq 0$ ) (рис. 10.1 а, б).

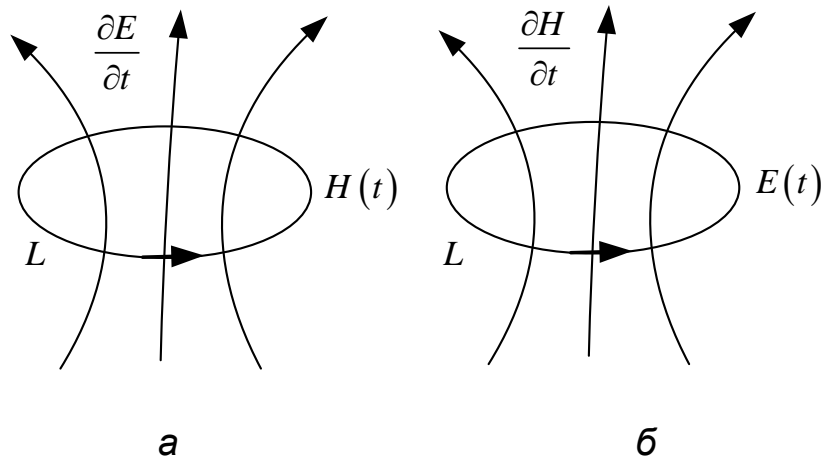


Рис. 10.1. Виникнення вихорів магнітної (а) та електричної (б) складових електромагнітного поля

Причому, якщо вихори магнітного поля мають місце й у разі, коли поле постійне, і у разі, коли поле змінне, то вихори (ротори) електричного поля мають місце лише в тому випадку, коли це поле змінюється в часі. У постійному електричному полі вихори дорівнюють нулю ( $\text{rot}\vec{E}=0$ ).

У координатній формі диференціальне рівняння Максвелла (10.13) має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{cases} \quad (10.14)$$

### 10.3. Повні системи рівнянь Максвелла у диференціальній та інтегральній формах

Повну систему рівнянь Максвелла отримаємо, якщо доповнимо розглянуте перше та друге рівняння Максвелла такими рівняннями:

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad \text{div}\vec{B} = 0. \quad (10.15)$$

Перші два рівняння дають змогу знайти вихори електричної та магнітної складових електромагнітного поля, другі задають їх джерела.

Причому друге із рівнянь (10.15) свідчить про відсутність магнітних зарядів у електромагнітному полі.

Отже, повна система рівнянь Максвелла в диференціальній формі має вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{j} = g \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mu_a \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

В інтегральній формі ця система запишеться таким чином:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \vec{j} d\vec{s} + \int_S \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = I + \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \quad \Phi_E = \int_S \vec{D} d\vec{s}, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi_H}{\partial t}, \quad \Phi_H = \int_S \vec{B} d\vec{s}, \\ \int_S \vec{D} d\vec{s} &= \int_S \varepsilon_a \vec{E} d\vec{s} = \sum q, \\ \int_S \vec{B} d\vec{s} &= \int_S \mu_a \vec{H} d\vec{s} = 0. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Якщо поля постійні, тобто

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0,$$

приходимо до раніше розглянутої системи рівнянь Максвелла для постійних полів. Так, для електростатичного поля знаходимо, що

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho. \quad (10.18)$$

Для магнітного поля

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad \operatorname{div} \mu \vec{H} = 0. \quad (10.19)$$

Розглянуті системи рівнянь вичерпно характеризують поведінку електромагнітного поля та її хвильовий характер. З одного боку, можна стверджувати, що зміна електричної складової поля зумовлює появу магнітної і навпаки. З іншого боку, ці складові необхідно розглядати в єдності як дві сторони єдиного електромагнітного поля. Навіть у постійному електричному або магнітному полі можна зафіксувати

наявність іншої складової поля (відповідно магнітної чи електричної), якщо переміщувати в них певним чином заряди або провідники зі струмом.

Крім того, в теорії відносності доведено, що при переході з однієї системи координат до іншої, що рухається щодо першої, напруженості змінних електричного і магнітного полів змінюються. Навіть у тому випадку, якщо електричне або магнітне поля в одній системі координат постійні, то в іншій, що рухається щодо першої, з'являються відповідно магнітна та електрична складові.

### **Контрольні запитання**

1. Які математичні вирази входять до систем рівнянь Максвелла в диференціальній та інтегральній формах?
2. Чи достатньо наведеної у лекції системи рівнянь Максвелла в диференціальній або інтегральній формах для повного опису електромагнітних полів та їх хвильового характеру?
3. Які рівняння описують взаємозв'язок між змінними магнітними та електричними полями?

# Лекція 11

## ЕНЕРГІЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 11.1. Вектор Умова – Пойнтінга

Як було встановлено раніше, енергії електростатичного та магнітного полів у заданому об'ємі  $V$  відповідно є такими:

$$W_E = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV, \quad W_H = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (11.1)$$

Зрозуміло, що в змінному електромагнітному полі, в якому присутні і електрична і магнітна складові напруженостей  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  і  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ , повна енергія поля в об'ємі  $V$  визначається формулою

$$W = \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (11.2)$$

Оскільки  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є функціями часу, то складова  $\frac{\epsilon_a E^2}{2}$  об'ємної густини енергії електричної компоненти поля і складова  $\frac{\mu_a H^2}{2}$  магнітної компоненти також змінюються в часі. У часі буде змінюватись і повний запас енергії  $W(t)$  в об'ємі  $V$ . Необхідно зрозуміти, що відбуватиметься з енергією об'ємом  $V$  з часом.

Запишемо перші два рівняння Максвелла у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \text{rot} \vec{H} - \vec{j}, \\ \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\text{rot} \vec{E}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Складемо скалярний добуток першого рівняння з вектором  $\vec{E}$ , а другого – з вектором  $\vec{H}$  та підсумуємо їх:

$$\epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{j} \vec{E}. \quad (11.4)$$

Оскільки

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}, \quad \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t},$$

то ліва частина рівняння (11.4) запишеться у вигляді



$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \quad (11.5)$$

Очевидно, що вираз (11.5) характеризує зміну часу об'ємної густини енергії.

Враховуючи раніше отриману формулу

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B},$$

перші два доданки в рівнянні (11.4) запишемо так:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div}(\vec{H} \times \vec{E}) = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}).$$

Тоді в цілому рівняння (11.4) набуде такого вигляду:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{j} \vec{E}. \quad (11.6)$$

Після інтегрування (11.6) за об'ємом  $V$  отримуємо

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dv + \int_V \vec{j} \vec{E} dv, \quad (11.7)$$

де

$$W = \int_V \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv. \quad (11.8)$$

$W$  – енергія поля, запасена в об'ємі  $V$ ;  $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$  – вектор, який отримав назву вектора Умова – Пойнтінга.

Зліва в рівнянні (11.7) вираз  $-\frac{\partial W}{\partial t}$  визначає швидкість зміни часу повної енергії в об'ємі  $V$ . Його величина характеризує або відтік енергії з об'єму  $V$ , або приплив енергії до цього об'єму в одиницю часу. Якщо права частина (11.7) – позитивна величина, то  $\frac{\partial W}{\partial t} < 0$ . Це означає, що енергія в об'ємі зменшується, тобто має місце відтік енергії.

Відповідно до теорії Гауса – Остроградського перший доданок в (11.7)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\Pi} dv = \int_S \vec{\Pi} ds. \quad (11.9)$$

Розмірність цих величин дорівнює розмірності потужності. Тому слід очікувати, що  $\int_S \vec{\Pi} ds$  – це потік потужності поля крізь поверхню  $S$ , а  $\vec{\Pi}$  – густина цього потоку.

Таким чином, вектор Умова – Пойнтінга

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (11.10)$$

це густина потоку потужності або, що те саме, густина потоку енергії, що проходить крізь поверхню  $S$  за одиницю часу. Це вектор, перпендикулярний до векторів напруженості полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Напрямок цього потоку відповідає правилу правого гвинта, що обертається від  $\vec{E}$  до  $\vec{H}$ . Саме у цьому напрямку поширюється електромагнітне поле. І в цьому напрямку здійснюється перенесення його енергії. Другий доданок (11.7) свідчить про те, що частину енергії поле витрачає на розігрівання об'єму  $V$ . Величина цієї витрати енергії в одиницю часу дорівнює потужності  $P$  (або кількості тепла  $Q$ , що виділяється в об'ємі  $V$  в одиницю часу):

$$P = Q = \int_V \vec{j} \vec{E} dv. \quad (11.11)$$

Беручи до уваги, що  $j = g\vec{E}$ , ця величина також визначається як

$$Q = \int_V \frac{j^2}{g} dv = \int_V E^2 g dv. \quad (11.12)$$

Отже, рівняння (11.7) можна записати у такому вигляді:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_S \vec{\Pi} ds + Q. \quad (11.13)$$

Це рівняння було отримано 1885 року англійським фізиком Пойнтінгом, а в загальному вигляді, як поняття потоку енергії – російським ученим Н. А. Умовим. Співвідношення (11.7), (11.13) є змістом теореми Умова – Пойнтінга та характеризують закон збереження енергії.

Слід зазначити, що величина втрат енергії на розігрівання об'єму  $V$  є позитивною величиною, тобто  $Q > 0$ .

Потік  $\int_S \vec{\Pi} ds$  може бути як позитивним, так і негативним. Якщо  $\int_S \vec{\Pi} ds > 0$ , то енергія з часом в об'ємі  $V$  зменшується, тобто виходить за межі об'єму (рис. 11.1, 11.2). Очевидно, що в цьому випадку  $\frac{\partial W}{\partial t} < 0$ .

Якщо ж  $\int_S \vec{\Pi} ds < 0$ , то енергія ззовні надходить до об'єму  $V$ . Якщо при цьому втрати на тепло  $Q$

$$Q < \left| \int_s \vec{\Pi} d\vec{s} \right|,$$

то з часом енергія в об'ємі  $V$  зростатиме.

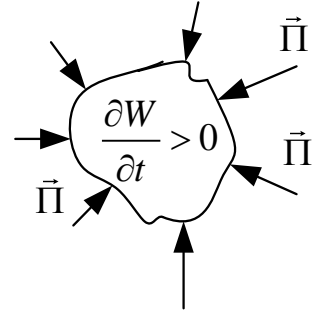
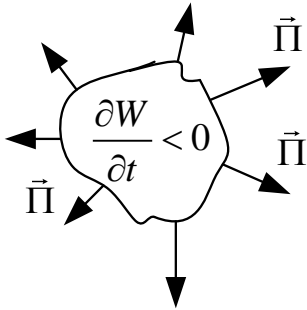


Рис. 11.1. Відтік енергії з об'єму  $V$

Рис. 11.2. Приплив енергії в об'єм  $V$

Наведемо кілька прикладів, що ілюструють процес поширення енергії відповідно до теореми Умова – Пойнтінга.

1. Розглянемо циліндричний провідник радіусу  $a$  і довжини  $\ell$ , уздовж якого тече струм  $I$  (рис. 11.3).

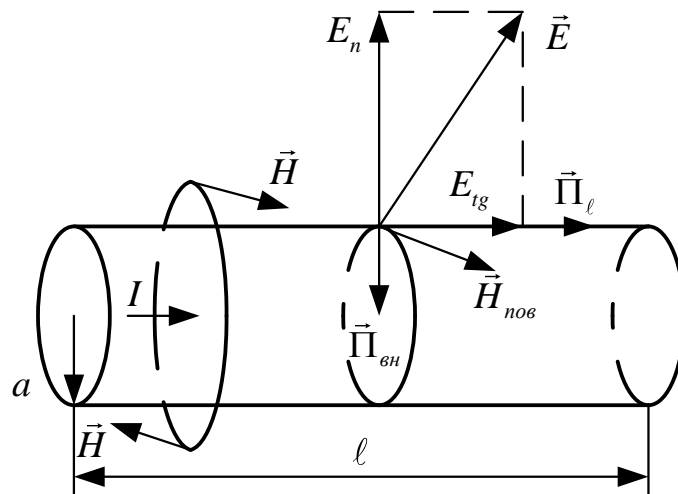


Рис. 11.3. Циліндричний провідник радіусу  $a$  та довжини  $\ell$ , уздовж якого тече струм  $I$

Електричне поле  $\vec{E}$  поблизу провідника можна подати у вигляді векторної суми нормальної  $E_n$  та тангенційної  $E_{tg}$  компонентів. Вектор  $\vec{H}$  перпендикулярний лінії струму. Отже, вектор Умова – Пойнтінга буде мати дві компоненти. Одна з них,  $\vec{\Pi}_\ell$ , спрямована вздовж провідника, інша,  $\vec{\Pi}_{вн}$

– перпендикулярна до поверхні. Тому доцільно вважати, що з компонентою  $\vec{\Pi}_\ell$  пов'язане перенесення енергії вздовж провідника, а компонента  $\vec{\Pi}_{\text{вн}}$  поглинається провідником і пов'язана з тепловими втратами енергії у провіднику.

Ці втрати неважко підрахувати:

$$P = Q = \int_S \vec{\Pi}_{\text{вн}} d\vec{s} = \int_S (\vec{E}_{\text{тг}} \times \vec{H}) ds = E_{\text{тг}} H 2\pi a \ell. \quad (11.14)$$

Густина струму  $j = gE_{\text{тг}}$ , отже,  $E_{\text{тг}} = \frac{j}{g}$ . Для розрахунку величини  $|\vec{H}|$  біля поверхні скористаємося теоремою про циркуляцію напруженості поля  $\vec{H}$

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = I,$$

де інтеграл береться по колу радіуса  $a$  безпосередньо на поверхні провідника. Оскільки величина  $\vec{H}$  однакова скрізь на цьому колі, то

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = H \int d\ell = H 2\pi a.$$

Тоді

$$H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Підставляючи величини  $E_{\text{тг}}$  і  $\vec{H}$  у формулу (11.14), отримаємо

$$Q = \frac{j}{g} \frac{I}{2\pi a} 2\pi a \ell = \frac{jI}{g} \ell.$$

Оскільки густина струму

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi a^2},$$

а  $\frac{\ell}{gS} = R$ , то потужність

$$P = I^2 \frac{\ell}{gS} = I^2 R.$$

Відповідно до закону Джоуля – Ленца ця потужність, яка визначається потоком енергії всередину провідника в одиницю часу, витрачається на відповідне виділення тепла.

2. У другому прикладі розглянемо, як передається енергія від джерела ЕРС в навантаження, що характеризується опором  $R$ , за

звичайними проводами (рис. 11.4). Струм вважаємо постійним, а опір проводів рівним нулю.

Напрямок передачі енергії, як видно з рис. 11.4, визначається вектором Умова – Пойнтінга  $\vec{\Pi}$ . Видно, що напрямки струму  $I$  у верхньому та нижньому проводах протилежні. Однак передача енергії здійснюється в одному напрямку – від джерела ЕРС до навантаження. І у верхньому, і у нижньому проводах вектор  $\vec{\Pi}$  спрямований до навантаження.

Слід зазначити, що провідники є лише напрямними, вздовж яких каналізується енергія. Причому найбільша її густина має місце поблизу поверхні проводів. Енергія до навантаження рухається в середовищі навколо провідників. У навантаження також енергія надходить не з проводів, а із зовнішнього середовища. Символічно це видно з напрямків вектора  $\vec{\Pi}$  поблизу навантаження.

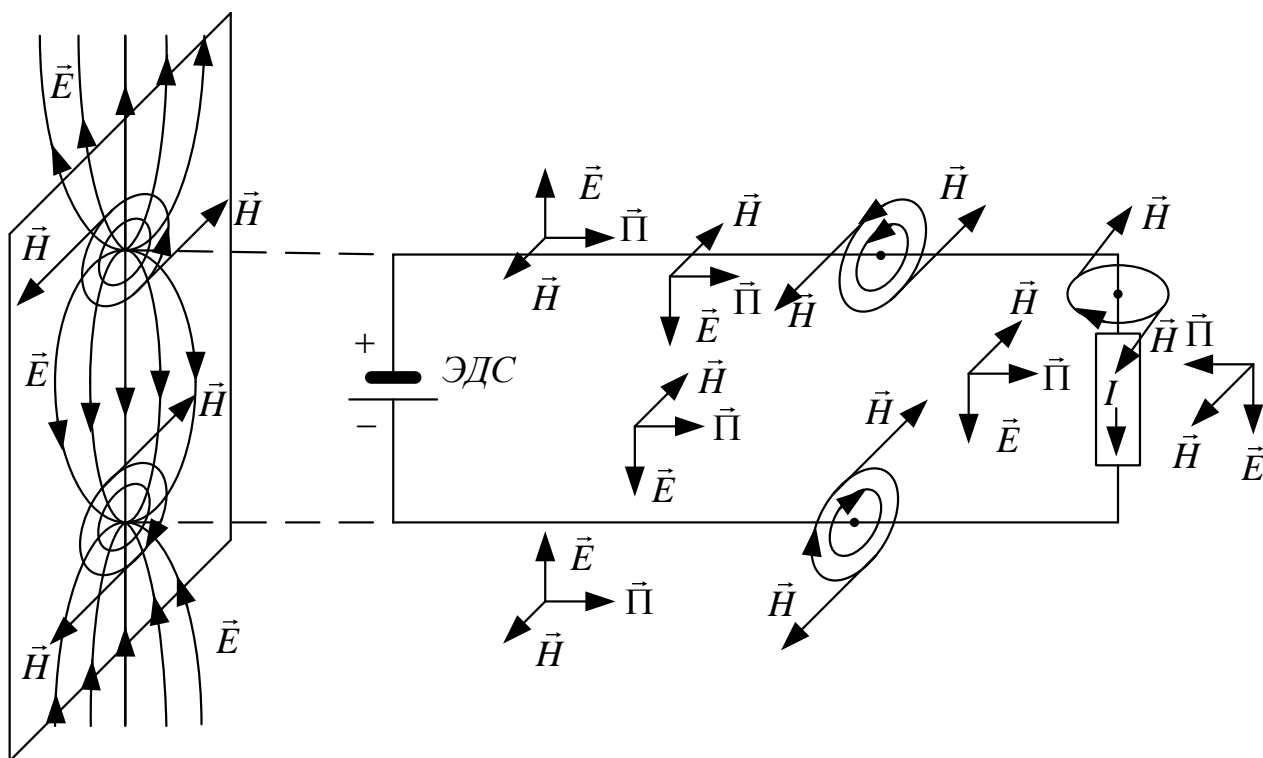


Рис. 11.4. Напрямок передачі енергії від джерела ЕРС

Якщо проводи мають опір, виникає тангенціальна складова поля і з'являється складова вектора  $\vec{\Pi}$ , спрямована всередину проводів, де енергія, що надходить у них, перетворюється на тепло.

Можна показати, що у коаксіальному кабелі (рис. 11.5) енергія передається не в провідниках, а в просторі між ними. Причому основну частину енергії сконцентровано поблизу поверхні внутрішнього провідника.

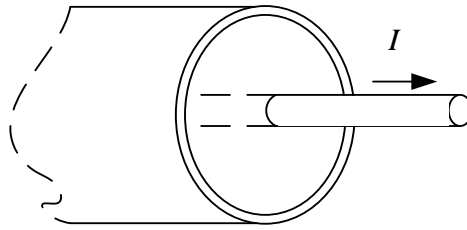


Рис. 11.5. Коаксіальний кабель

### Контрольні запитання

1. У чому полягає фізичний зміст вектора Умова – Пойнтінга?
2. Як визначити у просторі напрямок вектора Умова – Пойнтінга?
3. Який вираз описує потужність, що визначається потоком енергії всередину провідника в одиницю часу?

## Лекція 12 КОМПЛЕКСНА ФОРМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ТА ТЕОРЕМИ УМОВА – ПОЙНТІНГА

### 12.1. Використання символічного методу в теорії змінного електромагнітного поля

При розв'язанні задач електродинаміки, пов'язаних з випромінюванням і поширенням радіохвиль у різних середовищах, доводиться мати справу з вузькосмуговими коливаннями, близькими за своєю формою до монохроматичних, тобто таких, що змінюються за синусоїдальним або косинусоїдальним законом. Ці коливання зазвичай подають у вигляді

$$A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

У монохроматичних коливань на інтервалі  $t \in (-\infty, \infty)$  амплітуда  $A(t) = A = \text{const}$  та  $\varphi(t) = \varphi = \text{const}$ .

Якщо коливання не є монохроматичними, то їх можна розкласти у ряд Фур'є, що складається з суми монохроматичних коливань, і вивчати поведінку кожної гармоніки окремо.

Монохроматичні коливання виду

$$A\cos[\omega t + \varphi]$$

доцільно подати у комплексній формі як дійсну частину комплексної експоненти

$$\text{Re } Ae^{j(\omega t + \varphi)} = \text{Re } \dot{A}e^{j\omega t},$$

де

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi). \quad (12.1)$$

Величину  $\dot{A} = Ae^{j\varphi}$  називають комплексною амплітудою коливання.

Такий метод подання дійсних функцій у вигляді реальних або уявних частин комплексних експонент називається символічним. Символічний метод полегшує виконання математичних операцій над тригонометричними функціями, що описують коливання синусоїдального або косинусоїдального характеру.

Застосовуючи символічний метод, подамо електричну та магнітну компоненти монохроматичного електромагнітного поля, а також густини струмів та зарядів у вигляді

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \\ \vec{r} &= \|x, y, z\|, \quad \vec{j} = \vec{j}_0 e^{j\omega t}, \quad \rho = \rho_0 e^{j\omega t}.\end{aligned}\quad (12.2)$$

Похідні

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= j\omega \vec{E}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \\ \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= j\omega \vec{H}_0(\vec{r})e^{j\omega t}.\end{aligned}\quad (12.3)$$

Тоді система рівнянь Максвелла в диференціальній формі набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}_0 = \vec{j}_0 + j\omega \varepsilon_a \vec{E}_0, \\ \operatorname{rot} \vec{E}_0 = -j\omega \mu_a \vec{H}_0, \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E}_0 = -\dot{\rho}_0, \\ \operatorname{div} \mu_a \vec{H}_0 = 0. \end{cases}\quad (12.4)$$

Перше з цих рівнянь можна записати ще в такий спосіб:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = g \vec{E}_0 + j\omega \varepsilon_a \vec{E}_0 = j\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_0,$$

де величина

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{g}{\omega}\quad (12.5)$$

називається комплексною діелектричною проникністю середовища.

У наведених вище виразах величини  $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{j}_0, \dot{\rho}_0$  є комплексними амплітудами відповідних коливань. Надалі для спрощення записів формул у багатьох випадках ці амплітуди позначатимемо як  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{j}, \dot{\rho}_0$ . Тим більше, що рівняння Максвелла (12.4) справедливі і для миттєвих значень гармонійних коливань.

Однією з операцій, що виконують у розрахунках у різних задачах радіотехніки та електродинаміки, є операція множення математичних виразів, що описують гармонійні коливання,

$$\begin{aligned}A(t) \cdot B(t) &= A_0 \cos[\omega t + \varphi_A] \cdot B_0 \cos[\omega t + \varphi_B], \\ A(t) &= A_0 \cos[\omega t + \varphi_A] = \operatorname{Re} \dot{A}(t) = \operatorname{Re} \dot{A}_0 e^{j\omega t}, \\ B(t) &= B_0 \cos[\omega t + \varphi_B] = \operatorname{Re} \dot{B}(t) = \operatorname{Re} \dot{B}_0 e^{j\omega t}.\end{aligned}\quad (12.6)$$



Складемо добуток цих функцій у комплексній формі,

$$\operatorname{Re} \dot{A}(t) \cdot \operatorname{Re} \dot{B}(t) = \operatorname{Re} \dot{A}_0 e^{j\omega t} \cdot \operatorname{Re} \dot{B}_0 e^{j\omega t},$$

де

$$\dot{A}_0 = A_0 e^{j\varphi_A}, \quad \dot{B}_0 = B_0 e^{j\varphi_B},$$

комплексні амплітуди коливань  $A(t), B(t)$ .

Подамо функції  $A(t), B(t)$  у такому вигляді:

$$A(t) = \operatorname{Re} \dot{A}(t) = \frac{\dot{A}(t) + \dot{A}^*(t)}{2}, \quad B(t) = \operatorname{Re} \dot{B}(t) = \frac{\dot{B}(t) + \dot{B}^*(t)}{2}.$$

Легко знайти, що

$$\operatorname{Re} \dot{A} \operatorname{Re} \dot{B} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{A} \dot{B}^*. \quad (12.7)$$

Очевидно, що в цьому реальному (дійсному) вираженні під знаками реальних частин комплексних величин  $\dot{A} \dot{B}$  і  $\dot{A} \dot{B}^*$  можна брати їх комплексно пов'язані значення  $\dot{A}^* \dot{B}^*$  і  $\dot{A} \dot{B}$ .

Розглянемо випадки, коли добуток функцій  $A(t)$  і  $B(t)$  – це або добуток напруженостей електричного та магнітного полів

$$E(t) \cdot E(t) = E^2(t), \quad H(t) \cdot H(t) = H^2(t),$$

або абсолютне значення вектора Умова – Пойнтінга

$$|\vec{A}(t) \times \vec{B}(t)| = |\vec{E}(t) \times \vec{H}(t)| = E(t) \cdot H(t) \sin(\vec{E}, \vec{H}).$$

Зазвичай  $\sin(\vec{E}, \vec{H}) = \sin 90^\circ = 1$ .

Ці добутки характеризують миттєві значення потужності або енергії поля, що змінюються так само, як і функції (12.6), за гармонійним законом. Однак при розрахунках витрати енергії або потужності доцільно оцінювати цю витрату в середньому, використовуючи відому в математичному аналізі теорему про середнє значення функції

$$f_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

У радіотехнічних задачах середнє значення добутку функцій найчастіше знаходять за один або кілька періодів їх зміни за гармонійним законом,

$$[A(t)B(t)]_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t)B(t) dt. \quad (12.8)$$

Часто необхідність усереднення пояснюється тим, що втрати потужності теплоінерційних у тепловому відношенні матеріалів пов'язані не з миттєвою потужністю, а з середньою.

Підставляючи (12.7) у (12.8), отримаємо

$$\begin{aligned} [A(t)B(t)]_{cp} &= \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \dot{A}\dot{B} + \operatorname{Re} \dot{A}\dot{B}^*] dt = \frac{1}{2T} \int_0^T [\operatorname{Re} \dot{A}_0 \dot{B}_0 e^{j\omega t} + \operatorname{Re} \dot{A}\dot{B}^*] dt = \\ &= \frac{1}{2T} A_0 B_0 \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B) dt + \frac{1}{2T} \operatorname{Re} \dot{A}_0 \dot{B}_0^* \int_0^T dt \approx \\ &\approx \frac{\operatorname{Re} \dot{A}_0 \dot{B}_0^*}{2}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Перший доданок, зрозуміло, дорівнює нулю, тому що інтегрування здійснюється за один період знакозмінного коливання  $\cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)$  або за кілька цілих його періодів (при інтегруванні позитивні площі та негативні в сумі дають нуль). У принципі, якщо усереднення здійснюється на великому проміжку часу, що включає велике, але не ціле число періодів, то все одно другий інтеграл буде значно більшим за перший, оскільки перший буде пропорційний площі дещо більше півперіоду.

Тоді середні за період густини електричної, магнітної енергії та вектора Умова – Пойнтінга можна визначити за формулами

$$W_{Ecp} = \left( \frac{1}{2} \varepsilon_a E^2 \right)_{cp} = \frac{1}{2} \varepsilon_a [\operatorname{Re} \vec{E} \operatorname{Re} \vec{E}]_{cp} = \quad (12.10)$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_a \operatorname{Re} \vec{E}_0 \vec{E}_0^* = \frac{1}{4} \varepsilon_a |\dot{E}_0|^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_a E_0^2;$$

$$W_{Hcp} = \left( \frac{1}{2} \mu_a H^2 \right)_{cp} = \frac{1}{4} \mu_a \operatorname{Re} \vec{H}_0 \vec{H}_0^* = \frac{1}{4} \mu_a H_0^2, \quad (12.11)$$

$$\vec{\Pi}_{cp} = (\vec{E} \times \vec{H})_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*). \quad (12.12)$$

Середня об'ємна густина теплових втрат

$$(\vec{j}\vec{E})_{cp} = \left( \frac{\vec{j}^2}{g} \right)_{cp} = \frac{1}{g} (\operatorname{Re} \vec{j} \operatorname{Re} \vec{j})_{cp} = \frac{1}{2} \frac{j_0^2}{g}, \quad (12.13)$$

де  $j_0$  – амплітуда густини струму.

## Контрольні запитання

1. У чому полягає сенс використання символічного методу для опису монохроматичних коливань?
2. Які вирази входять до системи рівнянь Максвелла в комплексній формі?
3. Наведіть вирази, що визначають математичний зв'язок між комплексними формами функцій та їх дійсними значеннями.

### Лекція 13 ПЛОСКІ ХВИЛІ ТА ТЕОРІЯ ЇХ ПОШИРЕННЯ

Розрізняють плоскі, циліндричні та сферичні хвилі. Найбільш поширеними є сферичні хвилі, що поширюються від джерела, яке умовно можна вважати точковим, якщо відстань до нього є значно більшою за його розміри. Циліндричні хвилі збуджуються лінійним провідником (теоретично нескінченним). Плоскі хвилі є деякою ідеалізацією. Плоскою хвилею можна приблизно вважати і ділянку сферичної і ділянку циліндричної хвилі, якщо розміри цієї ділянки значно менше відстані до джерела випромінювання. Зазвичай прийняті поля реєструються в порівняно невеликих областях простору і в цих областях фронт будь-якої хвилі, що прийшов з порівняно великої дальності, можна вважати плоским. Плоскі хвилі є найбільш простими, і для їх опису зручно користуватися декартовою системою координат.

Оскільки вектор Умова – Пойнтінга визначається як векторний добуток векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$$

і характеризує напрямок поширення хвиль, то вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  коливаються в площинах, перпендикулярних до напрямку поширення.

Прийmemo за напрямок поширення хвиль вісь  $z$ . У плоскій хвилі фронт її розподілу перпендикулярний до напрямку поширення і в площині цього фронту розташовані вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ . Такі хвилі називають поперечними. Очевидно, що кожної миті значення  $\vec{E}$  й  $\vec{H}$  у площині фронту, тобто у площині  $XOY$  постійні та похідні від них  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ .

Нехай середовище є непровідним, немає зарядів і струм провідності  $\vec{j} = g\vec{E}$  у ньому відсутній. Тоді система рівнянь Максвелла практично симетрична щодо  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  та має вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Запишемо  $\operatorname{rot} \vec{H}$  у координатній формі з урахуванням того, що  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\vec{i}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \vec{i}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} + \vec{i}_z 0. \quad (13.2)$$

Тоді перше рівняння Максвелла у проєкціях запишеться так:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad 0 = \varepsilon_a \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (13.3)$$

Аналогічно запишемо і друге рівняння Максвелла

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad 0 = \mu_a \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (13.4)$$

Оскільки поле змінне у часі, воно є змінним й у просторі. Тоді з третіх рівнянь у (13.3) та (13.4) випливає, що  $E_z = H_z = 0$ . Тобто поле має поперечний характер і вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  змінюються лише у площині перпендикулярної осі  $z$ . З рівнянь, що залишилися, (13.3) і (13.4) розглянемо такі комбінації:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_a \frac{\partial H_y}{\partial t}, \end{cases} \quad (13.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_a \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_a \frac{\partial H_x}{\partial t}. \end{cases} \quad (13.6)$$

З цих двох систем видно, що попарно пов'язані між собою незалежними системами рівнянь (13.5) і (13.6) складові полів  $E_x$  і  $H_y$ , а також  $E_y$  і  $H_x$ . Ідентичні компоненти в них ортогональні один одному та описують незалежні одне від одного хвильові поля.

Такі поля є поляризованими. Напрямок поляризації зазвичай задають вектором  $\vec{E}$ . Перше з полів (рис. 13.1 а) поляризоване горизонтально, друге (рис. 13.1, б) має вертикальну поляризацію. Хвилі, що відповідають цим полям, мають поперечний характер. У них вектори взаємно перпендикулярні і коливаються у площині, перпендикулярній до напрямку поширення.

Надалі достатньо розглянути одну із систем, наприклад, систему (13.5).

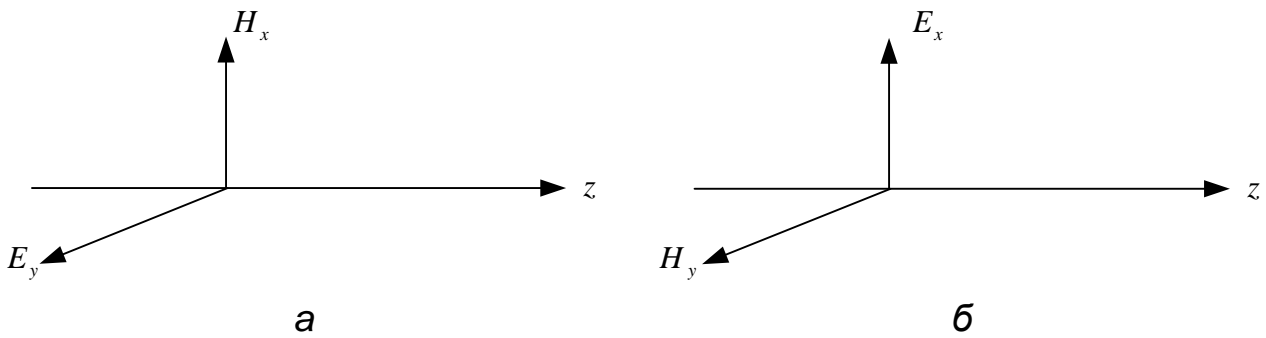


Рис. 13.1. Незалежні хвильові поля ортогональних поляризацій

Продиференціюємо перше рівняння (13.5) за часом  $t$

$$-\varepsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} \right)$$

і підставимо в це рівняння вираз  $\frac{\partial H_y}{\partial t}$  із другого рівняння (13.5).

Тоді отримаємо

$$\varepsilon_a \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (13.7)$$

або

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0, \quad (13.8)$$

де величина  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$  має розмірність швидкості. Рівняння вигляду (13.8) називають хвильовими.

Останнє рівняння можна записати так:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 \left( \frac{z}{v} \right)} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t_3^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad (13.9)$$

де  $t_3 = \frac{z}{v}$ .

Розв'язком цього рівняння у загальному вигляді будуть довільні функції такого вигляду:

$$E_{x1}(t-t_3) \text{ і } E_{x2}(t+t_3). \quad (13.10)$$

Саме для таких функцій другі похідні  $t$  і  $t_3$  будуть рівні між собою. Дійсно, ввівши позначення  $\tau = t - t_3$ , знайдемо, наприклад, другі похідні від функції  $E_x(t-t_3)$

$$\frac{\partial E_x(\tau)}{\partial t} = E'_x(\tau) \cdot 1, \quad \frac{\partial^2 E_x(\tau)}{\partial^2 t} = E''_x(\tau) \cdot 1 \cdot 1 = E''_x(\tau),$$

$$\frac{\partial E_x(\tau)}{\partial t_3} = E'_x(\tau) \cdot (-1), \quad \frac{\partial^2 E_x(\tau)}{\partial^2 t_3} = E''_x(\tau) \cdot (-1) \cdot (-1) = E''_x(\tau).$$

Рівняння (13.9) задовольнятимуть не лише функції (13.10), а й у загальному випадку їх сума

$$E_x = E_{x1}(t-t_3) + E_{x2}(t+t_3). \quad (13.11)$$

Такі функції називають хвильовими, бо вони описують хвилю, що рухається (не обов'язково гармонійну), як показано на рис. 13.2.

Час запізнення  $t_3 = \frac{z}{v}$  функції  $E_{x1}(t-t_3)$  відповідає затримці в часі хвилі до появи її в точці  $z$ . Швидкість цієї хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

Функція  $E_{x2}(t+t_3)$  визначає хвилю, що рухається у зворотному напрямку.

Розрахуємо швидкість руху електромагнітної хвилі у «порожньому» просторі, тобто у вакуумі,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (13.12)$$

Підставляючи значення  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$ , що дорівнюють  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma\text{Н}}{\text{м}}$  у формулу (13.12), отримаємо  $v = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Тобто швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі дорівнює швидкості світла.

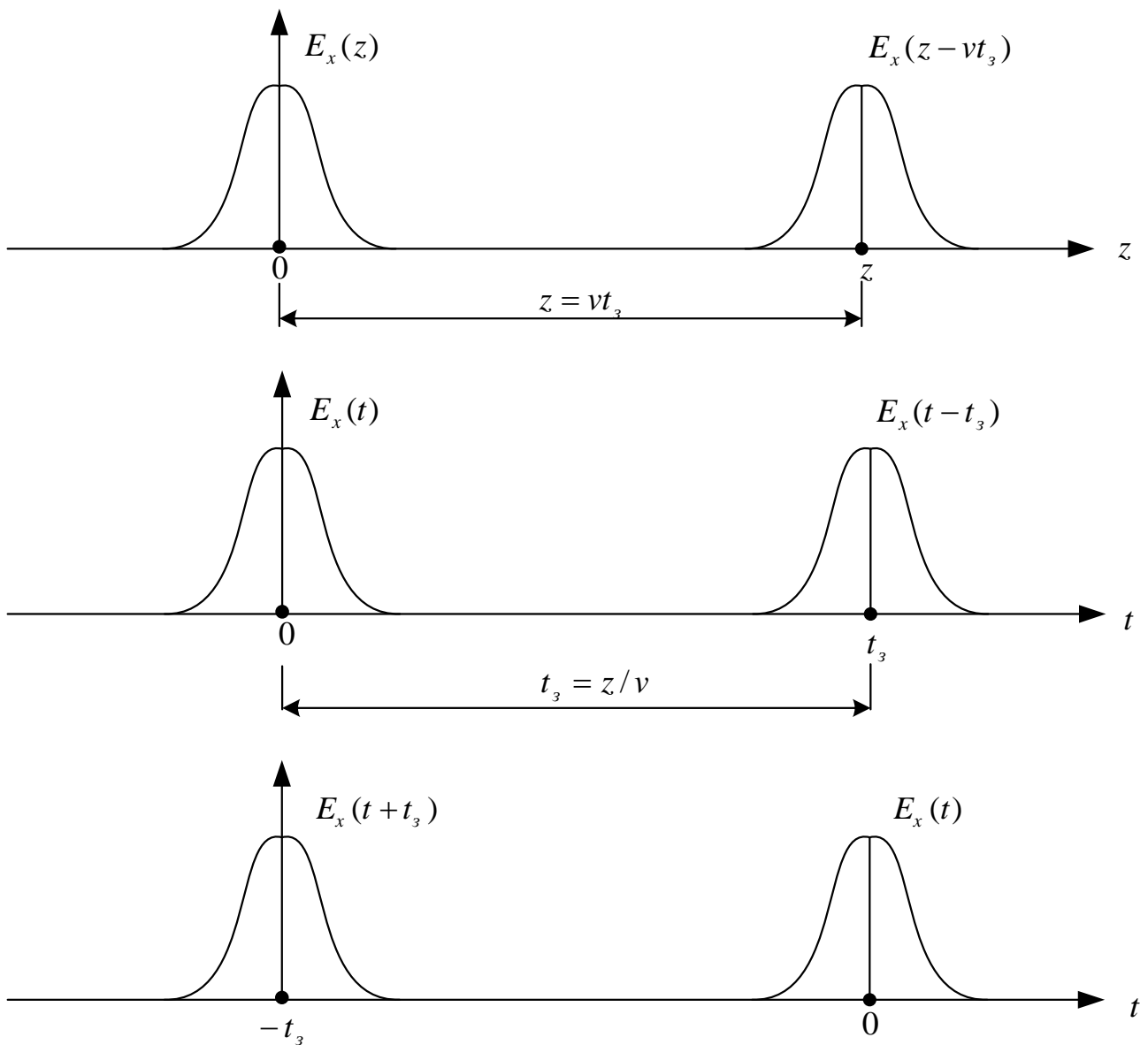


Рис. 13.2. Хвилі, що рухаються, як функції просторової координати  $z$  і часу  $t$

Тепер розв'яжемо систему рівнянь (13.5) щодо поля  $H_y$ . Продиференціюємо друге рівняння (13.5) із цієї системи за часом  $t$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\mu_a \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

і підставимо в нього вираз для  $\frac{\partial E_x}{\partial t}$  першого рівняння (13.5).

Отримаємо

$$\frac{1}{\epsilon_a} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_a \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2},$$



або

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t_3^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0, \quad (13.13)$$

де  $t_3 = \frac{z}{v}$ .

Розв'язком буде сума хвиль

$$H_y = H_{y1} \left( t - \frac{z}{v} \right) + H_{y2} \left( t + \frac{z}{v} \right), \quad (13.14)$$

де  $H_{y1}$  і  $H_{y2}$  – довільні функції із аргументом запізнення  $t_3 = \pm \frac{z}{v}$ .

Функції (13.11) та (13.14) пов'язані між собою рівняннями Максвелла (13.5) та (13.6).

Щоб знайти цей зв'язок, підставимо (13.11) та (13.14) у (13.5). Для простоти візьмемо лише перші доданки

$$E_{x1} \left( t - \frac{z}{v} \right) \text{ та } H_{y1} \left( t - \frac{z}{v} \right).$$

Позначимо  $t - \frac{z}{v} = \varphi(t, z)$ . Після підстановки рівняння (13.5) маємо

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_{x1}[\varphi(t, z)]}{\partial t} = - \frac{\partial H_{y1}[\varphi(t, z)]}{\partial z},$$

або

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_{x1}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial H_{y1}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

де

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{v}.$$

Тоді

$$\varepsilon_a \frac{\partial E_{x1}}{\partial \varphi} = \frac{1}{v} \frac{\partial H_{y1}}{\partial \varphi}. \quad (13.15)$$

Рівність (13.15) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial(\varepsilon_a E_{x1})}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left( \frac{1}{v} H_{y1} \right)}{\partial \varphi}.$$

Оскільки поле є змінним, то

$$\varepsilon_a E_{x1} \left( t - \frac{z}{v} \right) = \frac{1}{v} H_{y1} \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

або

$$E_{x1} \left( t - \frac{z}{v} \right) = \frac{1}{\varepsilon_a v} H_{y1} \left( t - \frac{z}{v} \right) = \rho H_{y1} \left( t - \frac{z}{v} \right). \quad (13.16)$$

Величину

$$\frac{1}{\varepsilon_a v} = \frac{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}{\varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \rho \quad (13.17)$$

називають хвильовим опором.

Сумарний розв'язок для прямої та зворотної хвиль:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x1} \left( t - \frac{z}{v} \right) + E_{x2} \left( t + \frac{z}{v} \right), \\ H_y &= \frac{1}{\rho} E_{x1} \left( t - \frac{z}{v} \right) + \frac{1}{\rho} E_{x2} \left( t - \frac{z}{v} \right). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Отже:

1) плоскі хвилі, які є розв'язком рівнянь Максвелла, мають поперечний характер. У них вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні і коливаються у площині, перпендикулярній до напрямку поширення;

2) розв'язок рівняння Максвелла складається з двох хвиль, прямої та зворотної. У вільному просторі зазвичай є лише пряма хвиля. Зворотні хвилі з'являються за наявності відбивальних середовищ;

3) швидкість поширення хвиль  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ . У вакуумі  $v = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;

4) відношення  $\frac{E_{x1}}{H_{y1}} = -\frac{E_{x2}}{H_{y2}} = \rho$ , де  $\rho = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$  – хвильовий опір середовища. Для вакууму

$$\rho = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Г}}{\text{м}} / \frac{1}{36} \pi \cdot 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}} = 120\pi \text{ Ом} = 377 \text{ Ом};$$

5) кількість енергії в електричному та магнітному полях однакова, адже  $\frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{\mu_a E^2}{2\rho^2} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}$ . У сумі об'ємна густина енергії

$$\frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a E^2}{2} = \varepsilon_a E^2 = \mu_a H^2.$$

За одиницю часу крізь площу  $S$  проходить енергія, зосереджена в об'ємі  $\nu S$

$$P = \varepsilon_a E^2 \nu S = \mu_a H^2 \nu S.$$

Цю потужність можна підрахувати, обчисливши потік вектора Умова – Пойнтінга

$$P = \vec{\Pi} \vec{S} = \Pi S = EHS = \frac{E^2}{\rho} S = \frac{\varepsilon_a E^2 S}{\varepsilon_a \rho} = \varepsilon_a E^2 \nu S,$$

$$\text{де } \varepsilon_a \rho = \varepsilon_a \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{1}{\nu}.$$

У окремому випадку хвиля має гармонійний, тобто синусоїдальний або косинусоїдальний характер:

$$E = E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{\nu} \right) \right] = E_0 \cos(\omega t - kz),$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kz) = \frac{E_0}{\rho} \cos(\omega t - kz).$$

У комплексній формі

$$\dot{E} = E_0 \exp[j(\omega t - kz)].$$

Величину  $k = \frac{\omega}{\nu}$  називають хвильовим числом.

З одного боку,

$$k = \frac{\omega}{\nu} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a},$$

з іншого –

$$k = \frac{\omega}{\nu} = \frac{2\pi f}{\nu} = \frac{2\pi}{T\nu} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

де  $T$  – період коливань,  $\lambda = T\nu$  – довжина хвилі (рис. 13.3).

Вектори  $E$  і  $H$  коливаються у взаємно перпендикулярних площинах, як показано на рис. 13.4.

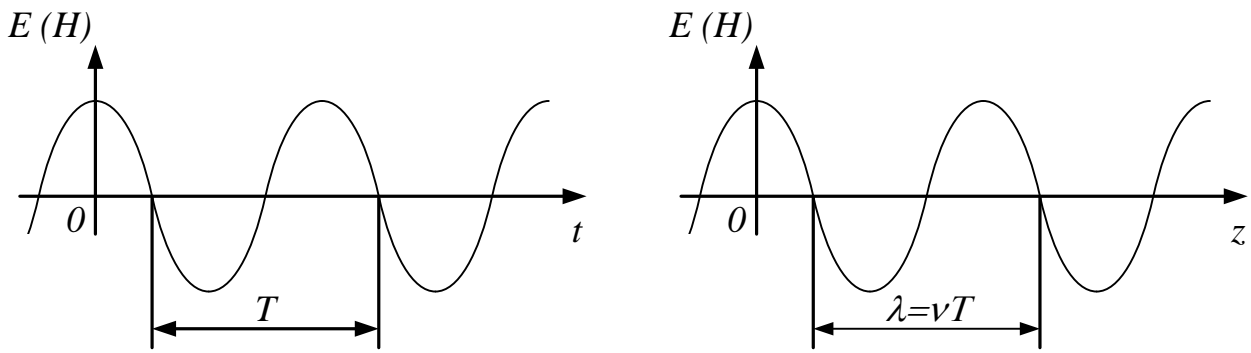


Рис. 13.3. Параметри гармонійних хвиль

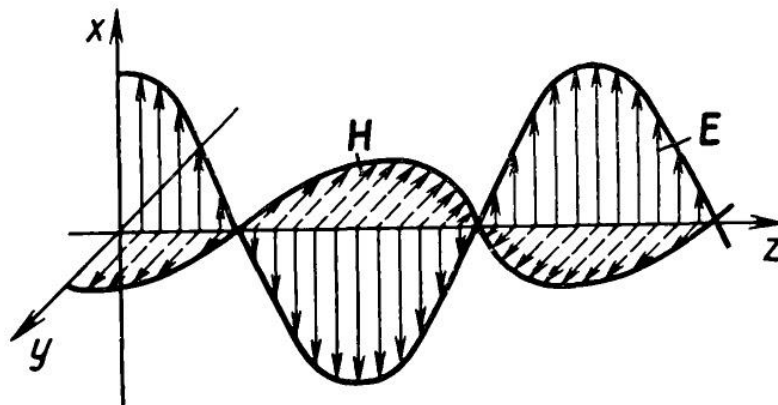


Рис. 13.4. Характер коливань векторів  $E$  та  $H$

### Контрольні запитання

1. Які умови необхідно використовувати при математичному описі плоских хвиль?
2. Орієнтація у просторі якого вектора,  $\vec{E}$  чи  $\vec{H}$ , визначає поляризацію плоских електромагнітних хвиль?
3. Наведіть вираз, що визначає швидкість поширення плоских електромагнітних хвиль у будь-якому середовищі.
4. Якій величині дорівнює швидкість поширення плоских електромагнітних хвиль у вакуумі?

## Лекція 14 ТЕОРІЯ ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ

### 14.1. Електрофізичні характеристики середовищ поширення радіохвиль

Запишемо повну систему рівнянь Максвелла у диференціальній формі:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad j = g \vec{E},$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0.$$

Для гармонійних коливань у комплексній формі ця система була знайдена у такому вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = \vec{j}_0 + j\omega \varepsilon_a \vec{E}_0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_0 = -j\omega \mu_a \vec{H}_0,$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E}_0 = \rho_0,$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H}_0 = 0.$$

Запишемо перше рівняння Максвелла таким чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_0 &= \vec{j}_0 + j\omega \varepsilon_a \vec{E}_0 = g \vec{E}_0 + j\omega \varepsilon_a \vec{E}_0 = (g + j\omega \varepsilon_a) \vec{E}_0 = \\ &= j\omega \left( \varepsilon_a + \frac{g}{j\omega} \right) \vec{E}_0 = j\omega \dot{\varepsilon}_a \vec{E}_0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Величину

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + \frac{g}{j\omega} = \varepsilon_a - j \frac{g}{\omega} = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

називають комплексною діелектричною проникністю, де  $\varepsilon' = \varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$  – дійсна частина  $\dot{\varepsilon}_a$ , а  $\varepsilon'' = \frac{g}{\omega}$  – її уявна частина. Величина уявної частини залежить від питомої провідності середовища та частоти.

Деякі типові значення параметрів  $\varepsilon_r$  та  $g \left[ \frac{см}{м} \right]$  різних середовищ наведено у табл. 14.1.

Таблиця 14.1

Діелектричні характеристики середовищ

Середовище	$\varepsilon_r$		$g$	
	Від	До	Від	До
Морська вода	80	–	0,66	6,6
Волога земля	5	20	$10^{-3}$	$10^{-2}$
Суха земля	2	6	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$
Прісна вода	80	–	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Часто комплексну діелектричну проникність подають у такому вигляді:

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta), \quad (14.2)$$

де величину  $\delta$  називають кутом електричних втрат, а величину  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$  – тангенсом кута втрат.

Тоді

$$\dot{\varepsilon}_a = |\dot{\varepsilon}_a| \cdot e^{-j\delta}, \quad \varepsilon' = |\dot{\varepsilon}| \cos \delta, \quad \varepsilon'' = |\dot{\varepsilon}| \sin \delta. \quad (14.3)$$

Усі середовища можна розділити на три класи: діелектрики, напівпровідники та провідники. Для діелектриків  $g \ll \varepsilon_a \omega$  (або  $\frac{g}{\varepsilon_a \omega} \ll 1$ ).

Для провідників  $g \gg \varepsilon_a \omega$ . Напівпровідники займають проміжне положення. Поділ на такі класи залежить від частоти  $\omega$ . З умови

$$\varepsilon_a \omega = g$$

можна знайти граничну частоту

$$\omega_{cp} = \frac{g}{\varepsilon_a}. \quad (14.4)$$

Очевидно, на низьких частотах нижче граничної частоти переважним є струм провідності, але на високих, вище граничної частоти, – струм зсуву. На частотах  $\omega \gg \omega_{zp}$  середовище вважатиметься діелектриком.

Розглянемо деякі типові середовища.

1. Сухий ґрунт. Для нього

$$g = 4 \cdot 10^{-4} \div 10^{-5} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \left( \frac{\text{См}}{\text{м}} \right),$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (2 \div 6) \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \left( \frac{\Phi}{\text{м}} \right).$$

Нехай  $g = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{См}}{\text{м}}$ ,  $\varepsilon_a = 3\varepsilon_0 = \frac{1}{12\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}$ , тоді

$$f_{zp} = \frac{\omega_{zp}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{g}{\varepsilon_a} = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц}.$$

*Примітка:* розмірність питомої провідності

$$\dim g = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = \frac{\text{См}}{\text{м}} = \frac{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{к}^2}.$$

Розмірність ємності

$$\dim C = 1\Phi = 1 \frac{\text{с}^4 \cdot \text{А}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{к}^2}.$$

$$\text{Тоді } \dim \frac{g}{\varepsilon_a} = \frac{\text{с}^3 \cdot \text{А}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{к}^2} \Big/ \frac{\text{с}^4 \cdot \text{А}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{к}^2} = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц}.$$

Визначимо довжину хвилі, яка відповідає отриманій граничній частоті у вакуумі (або в повітрі,  $\varepsilon_r \approx 1$ ):

$$\lambda_{zp} = v T_{zp} = \frac{v}{f_{zp}} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} = 1 \text{ км},$$

де  $T_{zp}$  – період коливань хвиль граничної частоти,  $T_{zp} = \frac{1}{f_{zp}}$ .

2. Вологий ґрунт. Для нього беремо

$$g = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{См}}{\text{м}} \text{ та } \varepsilon_a = 10\varepsilon_0.$$

Тоді

$$f_{zp} = 10^7 \text{ Гц}, \quad \lambda_{zp} = 30 \text{ м (у вакуумі)}.$$

3. Прісна вода. Для неї

$$g \approx 10^{-3} \frac{\text{См}}{\text{м}}, \quad \varepsilon_a = 80\varepsilon_0,$$
$$f_{zp} = 2 \cdot 10^5 \text{ Гц}, \quad \lambda_{zp} \approx 300 \text{ м}.$$

4. Солонa морська вода. Для неї

$$g = 2 \text{ См / м}, \quad \varepsilon_a = 80\varepsilon_0,$$
$$f_{zp} = \frac{1}{2\pi} \frac{g}{\varepsilon_a} = 4 \cdot 10^{10} \text{ Гц}, \quad \lambda_{zp} = 0,75 \text{ см}.$$

5. Метал (мідь). Для нього

$$g = 57 \cdot 10^6 \frac{\text{См}}{\text{м}}, \quad \varepsilon_a = 10\varepsilon_0,$$
$$f_{zp} = 10^{17} \text{ Гц}, \quad \lambda_{zp} = 10^{-9} \text{ м}.$$

Це дуже висока частота. Слід зазначити, що світлові коливання мають порядок  $10^{14} \text{ Гц}$ , тобто у металах струми провідності в радіодіапазоні перевищують струми зсуву в тисячі разів. Також слід зазначити, що точних даних про  $\varepsilon_a$  металів немає, оскільки ця константа в металів важко піддається вимірюванню.

## 14.2. Особливості поширення плоских хвиль у середовищі з комплексною діелектричною проникністю

Як зазначалося, перше рівняння Максвелла в непровідному середовищі має вигляд

$$\text{rot}\vec{H} = j\omega\varepsilon_a\vec{E},$$

а в провідному

$$\text{rot}\vec{H} = g\vec{E}_0 + j\omega\varepsilon_a\vec{E} = j\omega\dot{\varepsilon}_a\vec{E},$$

де  $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\frac{g}{\omega}$ .

Формально ці рівняння мають однаковий вигляд і розв'язки системи рівнянь Максвелла повинні мати зовні однакову математичну форму.

Так, якщо у непровідному середовищі розв'язком є гармонійна хвиля

$$E = \dot{E}_0 e^{j(\omega t - k z)}, \quad k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad (14.5)$$



де  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$  – швидкість поширення хвиль у середовищі, то у провідному середовищі

$$E = \dot{E}_0 e^{j(\omega t - \dot{k}z)}, \dot{k} = \frac{\omega}{\dot{v}} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a}. \quad (14.6)$$

У цих виразах  $\dot{E}_0 = E_0 e^{j\varphi_E}$  – комплексна амплітуда хвилі, а  $\varphi_E$  – початкова фаза, що пов'язана з вибором початку відліку часу  $t$ .

Хвильові опори у цих середовищах мають вигляд

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}, \quad \dot{\rho} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a - j\frac{\omega}{g}}}. \quad (14.7)$$

Оскільки  $\dot{k}$  – комплексне число, його можна зобразити у вигляді

$$\dot{k} = \text{Re} \dot{k} + j \text{Im} \dot{k} = \beta - j\alpha.$$

Тоді формулу (14.6) для поля  $E$  можна записати як

$$\dot{E} = \dot{E}_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (14.8)$$

або у дійсній формі

$$\text{Re} \dot{E} = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_E).$$

Магнітна складова  $H$

$$\dot{H} = \frac{\dot{E}_0}{\dot{\rho}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} = \dot{H}_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (14.9)$$

Комплексну величину  $\dot{\rho}$  можна подати у вигляді

$$\dot{\rho} = \rho e^{j\varphi_\rho}.$$

Тоді

$$\dot{H} = \frac{\dot{E}_0}{\rho} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \varphi_\rho)} = H_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \varphi_\rho + \varphi_E)}, \quad (14.10)$$

де

$$\dot{H}_0 = \frac{\dot{E}_0}{\dot{\rho}} = \frac{\dot{E}_0}{\rho} e^{-j\varphi_\rho} = \frac{E_0}{\rho} e^{j(-\varphi_\rho + \varphi_E)}. \quad (14.11)$$

Виконаємо розрахунки постійних згасання та поширення  $\alpha$  та  $\beta$

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{\left( \varepsilon_a - j \frac{g}{\omega} \right) \mu_a} = \beta - j\alpha.$$

Піднесши у квадрат цю рівність, отримаємо

$$\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - j\omega g \mu_a = \beta^2 - 2j\beta\alpha - \alpha^2,$$

або

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a, \quad (14.12)$$

$$2\beta\alpha = \omega g \mu_a. \quad (14.13)$$

Також знайдемо квадрат модуля цієї рівності

$$\beta^2 + \alpha^2 = \omega^2 \mu_a \sqrt{\varepsilon_a^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}. \quad (14.14)$$

З рівнянь (14.12)–(14.14) знаходимо

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2}} \right), \quad (14.15)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2}} \right). \quad (14.16)$$

Зауважимо, що  $\frac{g}{\omega \varepsilon_a} = tg \delta$ , тобто

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left( 1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta} \right), \quad (14.17)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \left( -1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta} \right). \quad (14.18)$$

Постійне поширення

$$\beta = \frac{\omega}{v_{cp}} = \frac{2\pi}{\lambda_{cp}}, \quad (14.19)$$

де  $v_{cp}$ ,  $\lambda_{cp}$  – відповідно фазова швидкість і довжина хвилі в середовищі.

З формули (14.13) знаходимо, що фазова швидкість у середовищі

$$v_{cp} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\alpha}{\mu_a g}. \quad (14.20)$$

Комплексний хвильовий опір

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}}. \quad (14.21)$$

Його можна записати у вигляді

$$\dot{\rho} = \frac{\mu_a}{\sqrt{\mu_a \dot{\epsilon}_a}}.$$

Оскільки комплексне постійне поширення (хвильове число)

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\mu_a \dot{\epsilon}_a},$$

то з урахуванням (14.14)

$$\dot{\rho} = \frac{\mu_a \omega}{\dot{k}} = \frac{\mu_a \omega}{\beta - j\alpha},$$

$$|\dot{\rho}| = \frac{\mu_a \omega}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} = \frac{\mu_a \omega}{\sqrt{\mu_a \omega^2 \sqrt{\epsilon_a^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}}} = \sqrt[4]{\frac{\mu_a^2}{\epsilon_a^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}}, \quad (14.22)$$

$$\varphi_\rho = \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \arctg \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon_a^2 \omega^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon_a^2 \omega^2}}} = \arctg \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + tg^2 \delta}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + tg^2 \delta}}. \quad (14.23)$$

Розглянемо фізичний зміст  $\alpha$ . Амплітуда хвилі

$$E = \dot{E}_0 e^{\alpha z}.$$

Очевидне відношення

$$\frac{\dot{E}_0 e^{-\alpha z} \Big|_{z=0}}{\dot{E}_0 e^{-\alpha z} \Big|_{z_0}} = e^{\alpha z_0} \quad (14.24)$$

показує, у скільки разів амплітуда хвилі зменшиться в середовищі при поширенні від точки  $z = 0$  до  $z_0$ .

Величину згасання при проходженні хвилею відстані  $z_0$  зазвичай оцінюють або в одиницях, які називають неперами, або в децибелах:

$$L(\text{неп}) = \ln e^{\alpha z_0} = \alpha z_0, \quad (14.25)$$

$$L(\text{дБ}) = 20 \lg e^{\alpha z_0} = 20 \alpha z_0 \lg e = 8,686 \alpha z_0, \quad (14.26)$$

де  $20 \lg e = 8,686$ .

При вирішенні конкретних практичних завдань більший інтерес становить загасання на одиницю довжини:

$$\frac{L(\text{неп})}{z_0} = \alpha \left[ \frac{\text{неп}}{M} \right], \quad \frac{L(\text{дБ})}{z_0} = 6,686\alpha \left[ \frac{\text{дБ}}{M} \right]. \quad (14.27)$$

У середовищі з малою провідністю фазова швидкість практично дорівнює швидкості поширення радіохвиль у діелектричному середовищі, оскільки

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (14.28)$$

Ця швидкість менша в  $\sqrt{\epsilon_r}$  разів порівняно зі швидкістю поширення хвиль у вакуумі ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с). Відповідно довжина хвилі

$$\lambda_{cp} = \frac{v_{cp}}{f} = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (14.29)$$

в середовищі менша довжини хвилі у вакуумі в  $\sqrt{\epsilon_r}$  разів.

Інтерес становить розгляд особливостей поширення хвиль у середовищах з великою провідністю, тобто у провідниках, коли

$$\frac{g}{\omega \epsilon_a} \gg 1.$$

У цьому випадку (див. (14.15)–(14.16))

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{1}{2} \omega^2 \epsilon_a \mu_a \frac{g}{\omega \epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega g \mu_a}{2}}.$$

Тоді

$$v_{cp} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a g}}.$$

Оскільки постійне згасання  $\alpha$  та постійне поширення (хвильове число) рівні між собою, то на підставі (14.20)

$$v_{cp} = \frac{2\alpha}{\mu_a g} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a g}}.$$

Хвильове число для провідника

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{\mu_a^2}{\epsilon_a^2 + \frac{g^2}{\omega^2}}} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{g}},$$

$$\varphi_{\rho} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Розглянемо такі дані для провідника (міді):

$$g = 57 \cdot 10^6 \frac{\text{См}}{\text{м}}, \quad \mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}, \quad f = 10^8 \text{ Гц}.$$

Тоді згасання, що припадають на одиницю довжини 1 м, можна визначити за формулою

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega g \mu_a}{2}} = \sqrt{\pi \cdot 10^8 \cdot 57 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 15 \cdot 10^4 \frac{\text{неп}}{\text{м}},$$

$$6,686\alpha \approx 10^6 \frac{\text{дБ}}{\text{м}}.$$

Це дуже великі цифри. У звичайних одиницях останнє число дорівнює  $10^{\frac{10^6}{20}}$ .

Фазова швидкість

$$v_{cp} = \frac{2\alpha}{\mu_a g} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^4}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 57 \cdot 10^6} \approx 4000 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Довжина хвилі у металі

$$\lambda_{cp} = \frac{v_{cp}}{f} = \frac{4000}{10^8} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0,004 \text{ см}.$$

У вакуумі для цієї частоти  $f = 10^8$  Гц

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{10^8 \text{ Гц}} = 3 \text{ м}.$$

Хвильовий опір у вакуумі

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}}{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}}} = 120\pi (\text{Ом}) = 377 \text{ Ом}.$$

Для міді

$$\rho = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{57 \cdot 10^{-6}}} = 0,0037 \text{ Ом}.$$

Отже, можна зробити висновок, що магнітна компонента поля порівняно з електричною

$$H = \frac{E}{\rho} \quad (14.30)$$

внаслідок незначного хвильового опору  $\rho$  в металі значно перевершує останню. У металі магнітна компонента є основною.

### Контрольні запитання

1. Усі середовища можна поділити на три класи: діелектрики, напівпровідники та провідники. Від яких параметрів залежить цей поділ?
2. За якою формулою розраховується згасання електромагнітних хвиль на одиницю довжини  $L$  у децибелах та неперах для довільного середовища?
3. Чому дорівнює хвильовий опір у вакуумі?

## Лекція 15 ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ТА МАГНІТНОЇ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ

Як зазначалося, щоб одержати єдине розв'язання рівнянь Максвелла в диференціальній формі як рівнянь у частинних похідних, додатково необхідно знання граничних умов. Це пов'язано з тим, що невідомі функції у цих рівняннях подано у вигляді їх похідних, які підлягають інтегруванню. Операції ж інтегрування дають неоднозначні результати, що конкретизується запровадженням початкових (у часі) та граничних (у просторі) умов. Необхідність розв'язання рівнянь у диференціальній формі (а не в інтегральній) пов'язана з тим, що саме рівняння у диференціальній формі дають можливість знайти поля у кожній точці конкретного місця досліджуваного простору з безперервною зміною діелектричної та магнітної проникності. Граничні умови зазвичай визначають межі, де закінчуються безперервні зміни цих параметрів. Найчастіше це межі різних середовищ у просторі, розділених так званими поверхнями поділу. Такими поверхнями можуть бути межі поділу середовищ: «повітря – ґрунт», «повітря – метал», «повітря – діелектрик», «метал – діелектрик» та ін.

Граничні умови зазвичай визначають за допомогою рівнянь Максвелла в інтегральній формі для малих об'ємів простору, зводячи їх до нескінченно малих величин шляхом граничних переходів.

Запишемо систему рівнянь Максвелла в інтегральній формі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s} + \int_S \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = I + \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}, \\ \Phi_E = \int_S \vec{D} d\vec{s}, \end{array} \right. \quad (15.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi_H}{\partial t}, \\ \Phi_H = \int_S \vec{B} d\vec{s}, \end{array} \right. \quad (15.2)$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \sum q, \quad (15.3)$$

$$\int_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (15.4)$$

Нехай є два середовища, розділені поверхнею поділу, яку в порівняно малій області можна вважати плоскою. Середовища мають різні значення електрофізичних параметрів  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \epsilon_{a2}, \mu_{a2}$  (рис. 15.1).

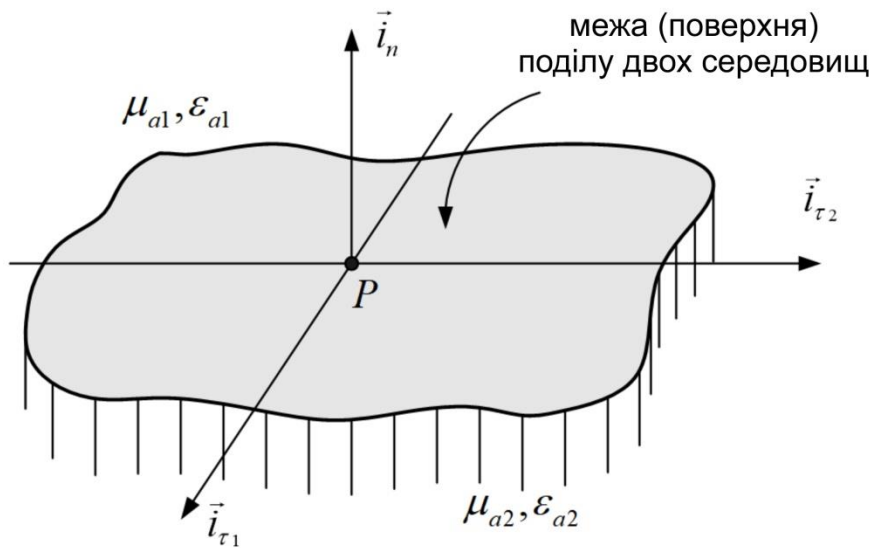


Рис. 15.1. Межа поділу середовищ із параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}$  і  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}$

Знайдемо спочатку граничні умови для нормальних компонентів магнітного поля. Для цього точку  $P$  помістимо в нескінченно малий об'єм з площею  $dS$  та висотою  $dh$  (рис. 15.2) і обчислимо потік вектора індукції (четверте рівняння Максвелла) в граничному випадку при  $dh \rightarrow 0$ :

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \vec{B}_1 \vec{i}_n \Delta S - \vec{B}_2 \vec{i}_n \Delta S = 0.$$

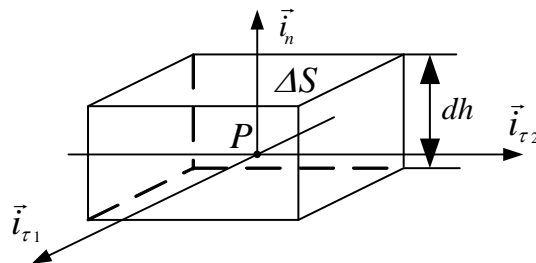


Рис. 15.2. До визначення нормальних складових полів

Очевидно, що при  $dh = 0$  потік крізь бічні грані дорівнює нулю. Тоді

$$\vec{B}_1 \vec{i}_n - \vec{B}_2 \vec{i}_n = 0$$

і нормальні компоненти вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  у різних середовищах будуть однаковими:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (15.5)$$

Оскільки  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , то

$$\mu_{a1} H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}, \quad (15.6)$$



тобто при переході з одного середовища до іншого компоненти напруженості магнітного поля змінюються стрибкоподібно.

Знайдемо тепер граничні умови для нормальних складових електричного поля. Діємо так само, як і при визначенні граничних умов для магнітного поля. Відповідно до теореми Гаусса – Остроградського (третє рівняння Максвелла)

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Звернемося до рис. 15.2. Припустимо спочатку, що  $q=0$ . Тоді, як і для магнітного поля, для електричного поля отримаємо

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad \varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}, \quad (15.7)$$

тобто нормальні компоненти вектора індукції електричного поля також дорівнюють один одному, а компоненти напруженості електричного поля змінюються стрибкоподібно при переході з одного середовища до іншого.

Якщо ж на поверхні середовища є заряди  $\sigma_{нов}$ , то

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = (\vec{D}_1 \vec{i}_n - \vec{D}_2 \vec{i}_n) \Delta S = \sigma_{нов} \Delta S.$$

Тоді

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{нов}. \quad (15.8)$$

У цьому випадку значення вектора індукції змінюються стрибкоподібно.

Для знаходження тангенціальних складових магнітного поля на межі обчислимо його циркуляцію по нескінченно малому контуру довжиною  $d\ell$  та висотою  $dh$  (рис. 15.3), що охоплює точку  $P$  (перше рівняння Максвелла).

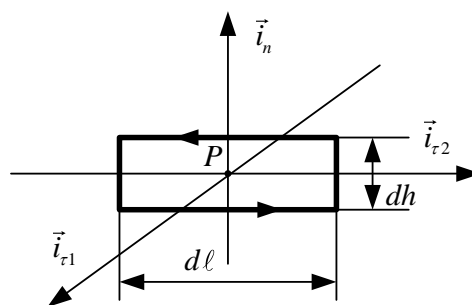


Рис. 15.3. До визначення тангенціальних складових полів

Враховуючи, що при  $dh \rightarrow 0$  інтеграл за цими напрямками буде дорівнювати нулю, отримаємо

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \int_L \vec{H} d\vec{\ell} = \vec{H}_2 \vec{i}_{\tau 2} d\ell - \vec{H}_1 \vec{i}_{\tau 2} d\ell = (\vec{j}_{\text{проб}} \vec{i}_{\tau 1} + \vec{j}_{\text{см}} \vec{i}_{\tau 1}) d\ell dh.$$

Тут можливі два випадки.

У першому випадку вважаємо, що провідність середовища є кінцевою. Тоді при  $dh \rightarrow 0$  права частина рівності також дорівнюватиме нулю і

$$\vec{H}_2 \vec{i}_{\tau 2} - \vec{H}_1 \vec{i}_{\tau 2} = 0,$$

або

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}}, \quad (15.9)$$

тобто тангенціальні компоненти напруженостей магнітних полів на межі дорівнюють нулю. Тангенціальні компоненти вектора магнітної індукції в цьому випадку змінюються стрибкоподібно.

У другому випадку вважаємо, що провідність середовища нескінченна (опір дорівнює нулю). В цьому випадку, як відомо, струм потече по поверхні в шарі, в ідеальному випадку, нульової товщини і

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \int_L \vec{H} d\vec{\ell} = (\vec{H}_2 \vec{i}_{\tau 2} - \vec{H}_1 \vec{i}_{\tau 2}) d\ell = dI_n,$$

або

$$\vec{H}_2 \vec{i}_{\tau 2} - \vec{H}_1 \vec{i}_{\tau 2} = H_{2\tau} - H_{1\tau} = \eta, \quad (15.10)$$

де  $\eta = \frac{dI_n}{d\ell}$  – поверхнева густина нормальної складової до площинки  $dhdl$  струму (величина цієї складової струму, що припадає на одиницю елемента довжини  $d\ell$ ).

Слід зазначити, що у ідеального провідника всі складові поля дорівнюють нулю, тобто  $\vec{H}_2 = 0$ . Тоді  $\vec{H}_1 \vec{i}_{\tau 2} = \eta$ . Струм тече у напрямку, перпендикулярному до вектора  $\vec{H}$ .

Наприкінці розглянемо граничні умови для електричних компонентів електромагнітного поля. Для цього відповідно до рис. 15.3 знайдемо циркуляцію по нескінченно малому контуру вектора електричного поля і врахуємо, що на бічних напрямках при  $dh = 0$  інтеграл по контуру буде дорівнювати нулю (друге рівняння Максвелла).

Тоді

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \int_L \vec{E} d\vec{\ell} = (\vec{E}_2 \vec{i}_{\tau 2} - \vec{E}_1 \vec{i}_{\tau 2}) d\ell = - \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \vec{i}_{\tau 1} d\ell dh.$$

Похідна  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  завжди є величиною кінцевою і  $dh = 0$  права частина цієї рівності дорівнюватиме нулю, тобто

$$\vec{E}_2 \vec{i}_{\tau 2} - \vec{E}_1 \vec{i}_{\tau 2} = 0,$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_{a1}} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_{a2}}. \quad (15.11)$$

Ці рівності свідчать про безперервність тангенціальних компонентів напруженості електричного поля на межі поділу середовищ. У той же час, значення відповідних векторів індукції розриваються.

У разі ідеального провідника, як було розглянуто раніше,

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} = 0. \quad (15.12)$$

Силкові лінії електричного поля біля поверхні ідеального провідника мають бути перпендикулярні до цієї поверхні.

### Контрольні запитання

1. Яким граничним умовам відповідають нормальні компоненти магнітного поля?
2. Яким граничним умовам відповідають нормальні складові електричного поля?
3. Чому дорівнюють тангенціальні компоненти напруженостей магнітних полів на межі поділу двох середовищ у випадку, коли провідність середовищ є кінцевою?
4. Чому дорівнюють тангенціальні компоненти напруженостей електричного поля на межі поділу двох середовищ у випадку, коли одне з них – ідеальний провідник?

## Лекція 16 ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ НА ПЛОСКІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Межу поділу двох середовищ вважають плоскою, якщо співвідношення між нерівностями її поверхні та довжиною хвилі задовольняє критерію Релея,

$$h < \frac{\lambda}{16 \cos \theta}.$$

Нехай на межу поділу двох середовищ з електрофізичними параметрами  $\epsilon_a$  і  $\mu_a$  падає плоска хвиля під кутом  $\theta_1$ . Плоский фронт падаючої хвилі перпендикулярний до напрямку падіння (рис. 16.1). Нехай відбита хвиля рухається у поки невідомому напрямку  $\theta_2$ , а заломлена – у напрямку  $\theta_3$ .

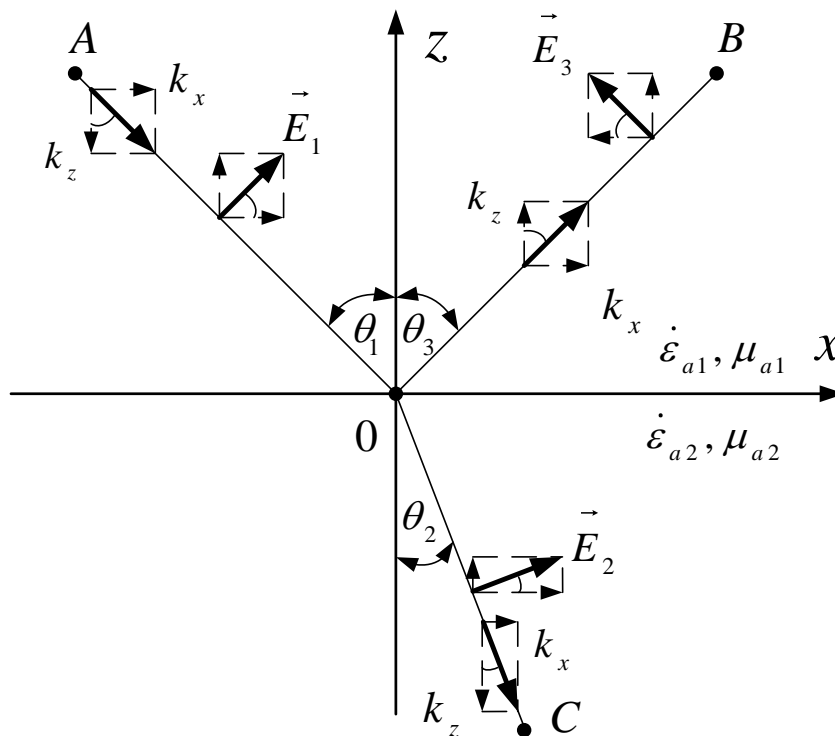


Рис. 16.1. Плоска хвиля на межі поділу двох середовищ

Нехай хвиля має вертикальну поляризацію, тобто вектор  $\vec{E}$  лежить у вертикальній площині  $xoz$ .

Для гармонійного коливання падаючу плоску хвилю в комплексній формі можна записати у вигляді

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{j[\omega t - \vec{k}_1 \vec{R}]}, \quad (16.1)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{10} e^{j[\omega t - \vec{k}_1 \vec{R}]} = \frac{[\vec{k}_{01} \times \dot{\vec{E}}_{10}]}{\dot{\rho}} e^{j[\omega t - \vec{k}_1 \vec{R}]}, \quad (16.2)$$

де  $\vec{k}_1 = \dot{k}_1 \vec{k}_{01}$ ,

$$\dot{k}_1 = \frac{\omega}{\dot{v}_1} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}} = \omega \sqrt{\varepsilon_{01} \mu_{01} \dot{\varepsilon}_{r1} \dot{\mu}_{r1}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{r1} \dot{\mu}_{r1}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{r1} \dot{\mu}_{r1}},$$

$$\dot{k}_{01} = \vec{i}_x k_{0x} + \vec{i}_z k_{0z} = \vec{i}_x \sin \theta_1 - \vec{i}_z \cos \theta_1,$$

$$|\vec{k}_{01}| = 1, \quad \dot{\rho} = \sqrt{\dot{\mu}_a / \dot{\varepsilon}_a},$$

$[\vec{k}_{01} \times \vec{E}_{10}]$  – векторний добуток векторів  $\vec{k}_{01}$  і  $\vec{E}_{10}$ .

У виразах (16.1), (16.2) множник  $e^{j\omega t}$  як загальний для всіх формул, що описують гармонічні коливання, можна опустити. Визначаючи хвильові вектори  $\vec{k}_2, \vec{k}_3$  у проекціях і враховуючи той факт, що

$$\vec{R} = \vec{i}_x x + \vec{i}_y y + \vec{i}_z z, \quad (16.3)$$

запишемо вирази для комплексних амплітуд полів падаючої, заломленої та відбитої хвиль

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{-j\vec{k}_1 \vec{R}} = \vec{E}_{10} e^{-jk_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}, \quad (16.4)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{-j\vec{k}_2 \vec{R}} = \vec{E}_{20} e^{-jk_2(x \sin \theta_2 - z \cos \theta_2)}, \quad (16.5)$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{30} e^{-j\vec{k}_3 \vec{R}} = \vec{E}_{30} e^{-jk_3(x \sin \theta_3 + z \cos \theta_3)}, \quad (16.6)$$

де

$$\vec{k}_2 = \dot{k}_2 \vec{k}_{02}, \quad \dot{k}_{02} = \vec{i}_x \sin \theta_2 - \vec{i}_z \cos \theta_2, \quad \dot{k}_2 = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_{a2} \dot{\mu}_{a2}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{r2} \dot{\mu}_{r2}},$$

$$\vec{k}_3 = \dot{k}_3 \vec{k}_{03}, \quad \dot{k}_{03} = \vec{i}_x \sin \theta_3 + \vec{i}_z \cos \theta_3, \quad \dot{k}_3 = \dot{k}_1 = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{r1} \dot{\mu}_{r1}}. \quad (16.7)$$

Вирази в круглих дужках в експонентах у формулах (16.4)–(16.6) з урахуванням знаків дорівнюють відстаням від точок А, В і С з поточними координатами  $x, y, z$  до точки 0 (рис. 16.1).

Магнітні компоненти полів з точністю до множника  $\rho^{-1}$  визначаються формулами (16.4)–(16.6), тобто

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{E}_1}{\rho_1}, \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{E}_2}{\rho_2}, \quad \vec{H}_3 = \frac{\vec{E}_3}{\rho_1}, \quad (16.8)$$

де

$$\rho_1 = \sqrt{\mu_{1a}/\varepsilon_{1a}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\mu_{2a}/\varepsilon_{2a}}. \quad (16.9)$$

Коефіцієнти відображення та заломлення знайдемо, залучаючи дані про граничні умови.

Так, на межі тангенціальні складові електричного та магнітного полів задовольняють умовам

$$z = 0, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (16.10)$$

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_1 \cos \theta_1 - \dot{E}_3 \cos \theta_3, \quad \dot{E}_{2\tau} = \dot{E}_2 \cos \theta_3. \quad (16.11)$$

Тоді при підстановці  $z = 0$  (16.4)–(16.5) та урахуванні цих граничних умов маємо

$$\dot{E}_{10} \cos \theta_1 e^{-jk_1 x \sin \theta_1} - \dot{E}_{30} \cos \theta_3 e^{-jk_3 x \sin \theta_3} = \dot{E}_{20} \cos \theta_2 e^{-jk_2 x \sin \theta_2}. \quad (16.12)$$

Ця рівність має виконуватися для будь-якого значення  $x$ . Це можливо лише у випадку, коли

$$\dot{k}_1 x \sin \theta_1 = \dot{k}_3 x \sin \theta_3 = \dot{k}_2 x \sin \theta_2. \quad (16.13)$$

Природно, що з виконання цієї рівності випливає виконання такої рівності:

$$\dot{E}_{10} \cos \theta_1 - \dot{E}_{30} \cos \theta_3 = \dot{E}_{20} \cos \theta_2. \quad (16.14)$$

Оскільки у верхньому середовищі  $\dot{k}_1 = \dot{k}_3 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}$ , то з (16.13) випливає, що

$$\theta_1 = \theta_3, \quad (16.15)$$

тобто кут падіння дорівнює куту відбиття. З цього рівняння (16.13), тобто з рівності  $\dot{k}_1 \sin \theta_1 = \dot{k}_2 \sin \theta_2$  випливає, що

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{a2} \dot{\mu}_{a2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \text{const}, \quad (16.16)$$

де  $n = \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a}$  – показник заломлення середовища.

Співвідношення (16.15), (16.16) називають законами Снелліуса.

Враховуючи граничні умови (16.10) для магнітних компонентів, знаходимо відповідні результівні поля на межі. При цьому також враховуємо, що вектор  $\vec{H}$  перпендикулярний до площини падіння  $xoz$  і паралельний межі поділу. Відповідно до правила правого гвинта щодо напрямку поширення доходимо висновку, що  $i$  в падаючій,  $i$  у відбитій,  $i$  в

заломленій хвилях вектор  $\vec{H}$  спрямований в один бік (від площини креслення до читача).

Діючи так само, як і при отриманні формул (16.11)–(16.14), знаходимо, що на межі

$$\dot{H}_{10} + \dot{H}_{30} = \dot{H}_{20},$$

або

$$\frac{\dot{E}_{10}}{\rho_1} + \frac{\dot{E}_{30}}{\rho_1} = \frac{\dot{E}_{20}}{\rho_2}. \quad (16.17)$$

Тоді маємо таку пару рівнянь (разом з (16.14)):

$$\dot{E}_{10} \cos \theta_1 - \dot{E}_{30} \cos \theta_1 = \dot{E}_{20} \cos \theta_2, \quad (16.18)$$

$$\dot{E}_{10} \rho_2 + \dot{E}_{30} \rho_2 = \dot{E}_{20} \rho_1, \quad (16.19)$$

розв'язуючи яку, знаходимо коефіцієнти відбиття та заломлення для коливань вертикальної поляризації

$$\dot{K}_{fB} = \frac{\dot{E}_{30}}{\dot{E}_{10}} = \frac{\rho_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \cos \theta_2}{\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2}, \quad (16.20)$$

$$\dot{T}_{fB} = \frac{\dot{E}_{20}}{\dot{E}_{10}} = \frac{2\rho_1 \cos \theta_1}{\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2}. \quad (16.21)$$

Ці коефіцієнти називають коефіцієнтами відбиття та заломлення Френеля.

Для визначення цих коефіцієнтів відбиття Френеля, тобто для розв'язання системи (16.18), (16.19), помножимо рівняння (16.18) на  $\rho_1$ , а (16.19) – на  $\cos \theta_2$ . Тоді отримаємо

$$\dot{E}_{10} \rho_1 \cos \theta_1 - \dot{E}_{30} \rho_1 \cos \theta_1 = \dot{E}_{10} \rho_2 \cos \theta_2 + \dot{E}_{30} \rho_2 \cos \theta_2,$$

або

$$-\dot{E}_{10} \rho_2 \cos \theta_2 + \dot{E}_{10} \rho_1 \cos \theta_1 = \dot{E}_{30} \rho_1 \cos \theta_1 + \dot{E}_{30} \rho_2 \cos \theta_2,$$

$$\dot{E}_{10} (\rho_1 \cos \theta_1 - \rho_2 \cos \theta_2) = \dot{E}_{30} (\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2).$$

Нехай  $\mu_a = \mu_0$ . Тоді враховуючи, що відповідно до (16.16)

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right)^2} = \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a1} \mu_0}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} \mu_0}} \sin \theta_1 \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{\dot{\epsilon}_{r1}}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sin^2 \theta_1},$$

знаходимо, що

$$\dot{K}_{fB} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\epsilon}_{a1}}} \cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\epsilon}_{a2}}} \sqrt{1 - \frac{\dot{\epsilon}_{r1}}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\epsilon}_{a1}}} \cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\dot{\epsilon}_{a2}}} \sqrt{1 - \frac{\dot{\epsilon}_{r1}}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sin^2 \theta_1}},$$

оскільки  $\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_r \epsilon_0$ , то на множник  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  чисельник і знаменник можна скоротити. Тоді

$$\begin{aligned} \dot{K}_{fB} &= \frac{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}}} - \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\dot{\epsilon}_{r1}}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sin^2 \theta_1}}{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}}} + \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\dot{\epsilon}_{r1}}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sin^2 \theta_1}} = \frac{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}}} - \frac{1}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}}{\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}}} + \frac{1}{\dot{\epsilon}_{r2}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}} = \\ &= \frac{\dot{\epsilon}_{r2} \cos \theta_1 - \sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}}{\dot{\epsilon}_{r2} \cos \theta_1 + \sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}}. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Так само неважко отримати формули для коефіцієнтів відбиття та заломлення Френеля для коливань горизонтальної поляризації:

$$\dot{K}_{f\Gamma} = \frac{\rho_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2}, \quad (16.23)$$

$$\dot{T}_{f\Gamma} = \frac{2\rho_2 \cos \theta_1}{\rho_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \cos \theta_2}. \quad (16.24)$$

Зокрема, при  $\mu_0 = 1$

$$\dot{K}_{f\Gamma} = \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}} \cos \theta_1 - \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r1}} \cos \theta_1 + \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \dot{\epsilon}_{r1} \sin^2 \theta_1}}, \quad (16.25)$$

при  $\dot{\epsilon}_{r1} = 1$

$$\dot{K}_{fB} = \frac{\dot{\epsilon}_{r2} \cos \theta_1 - \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \sin^2 \theta_1}}{\dot{\epsilon}_{r2} \cos \theta_1 + \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \sin^2 \theta_1}}, \quad (16.26)$$

$$\dot{K}_{f\Gamma} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2} - \sin^2 \theta_1}}. \quad (16.27)$$

Ці коефіцієнти мають найважливіше значення під час вирішення різних практичних завдань поширення радіохвиль.



Залежності модулів коефіцієнтів відбиття Френеля від  $\theta$  у випадку суто діелектричного середовища і середовища з провідністю показані на рис. 16.2 та рис. 16.3 відповідно.

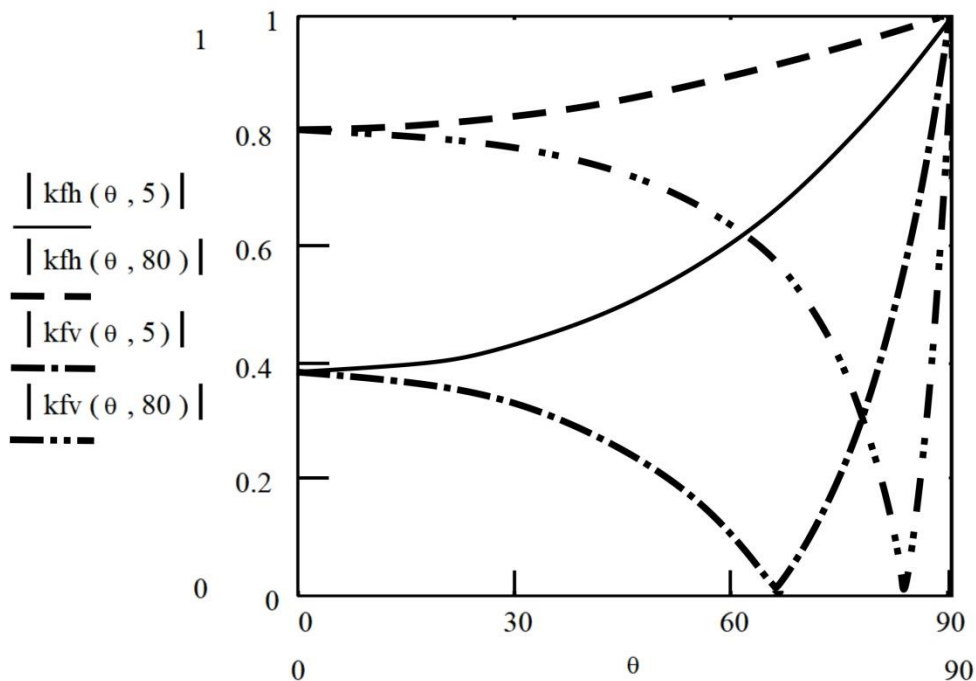


Рис. 16.2. Залежність модулів коефіцієнтів відбиття Френеля від  $\theta$ .  
Випадок чисто діелектричного середовища

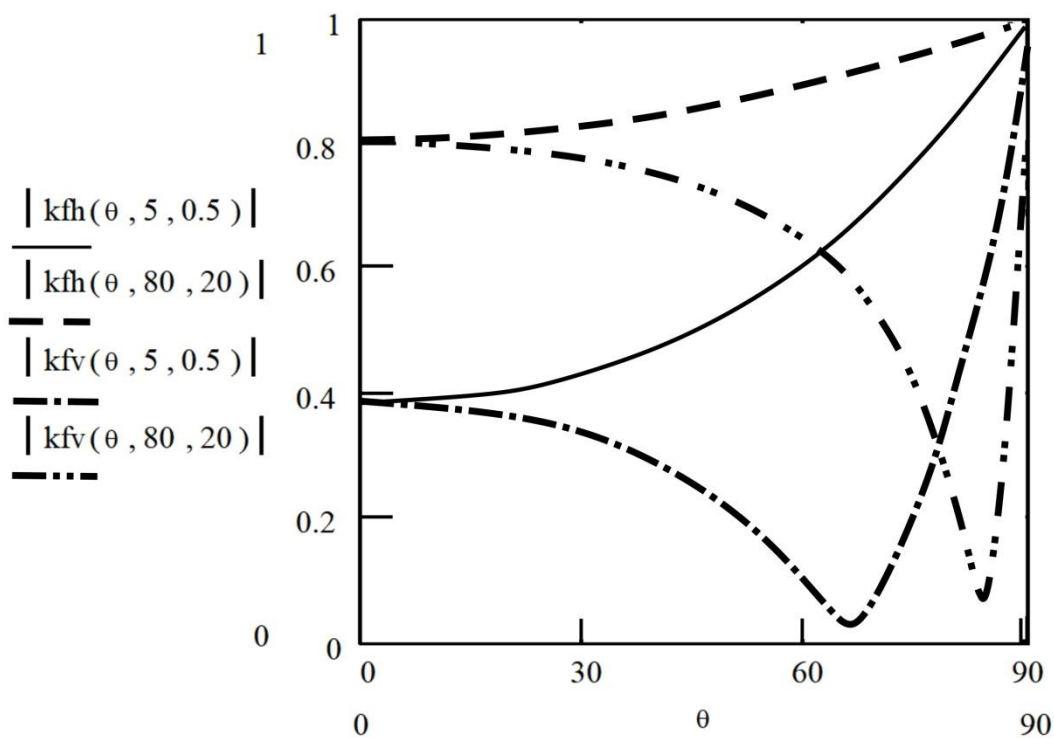


Рис. 16.3. Залежність модулів коефіцієнтів відбиття Френеля від  $\theta$ .  
Випадок середовища з провідністю

На цих рисунках показані графіки залежностей коефіцієнтів відбиття для коливань горизонтальної та вертикальної поляризацій для двох типів поверхонь з різними властивостями.

Кут, у якому коефіцієнт відбиття хвиль вертикальної поляризації дорівнює нулю, називають кутом повного внутрішнього заломлення або кутом Брюстера. При падінні хвиль під цим кутом на поверхню відбита хвиля відсутня, поле повністю йде під поверхню і має місце лише заломлена хвиля. Розмір цього кута залежить від величини діелектричної проникності. Чим більше  $\varepsilon_r$ , тим більше цей кут.

### Контрольні запитання

1. За якої умови межу поділу двох середовищ можна вважати плоскою?
2. Наведіть математичні вирази законів Снелліуса.
3. Від яких параметрів середовища та умов проведення вимірювань залежать коефіцієнти відбиття та заломлення Френеля?
4. Чи відрізняються математичні вирази для коефіцієнтів відбиття та заломлення електромагнітних хвиль для різних поляризацій?

## Лекція 17

### ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ РАДІОХВИЛЬ

Випромінювання радіохвиль має місце в тому випадку, якщо в просторі присутні струми, причому струми, що мають прискорення. Ці струми часто називають сторонніми. Вони протікають, наприклад, в антенах під дією сторонніх електрорушійних сил. Ці струми можуть виникати у провідних середовищах, наприклад, в іоносфері, під дією як власних, так і сторонніх полів. Завдання випромінювання можна вирішити, якщо розв'язати рівняння Максвелла при заданих зарядах і струмах, або за заданих граничних умов, що утворюються наведеними струмами або полями.

#### 17.1. Хвильові рівняння та запізнювальні потенціали

Запишемо рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} = \rho \\ \operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (17.1)$$

Застосуємо операцію ротора до першого рівняння

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) + \operatorname{rot} \vec{j}. \quad (17.2)$$

Підставимо значення  $\operatorname{rot} \vec{E}$  з другого рівняння, тоді

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \vec{j}. \quad (17.3)$$

Раніше було виведено загальну формулу для подвійної операції ротора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (17.4)$$

Оскільки  $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{H}) = 0$  через четверте рівняння Максвелла, то маємо

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{j}. \quad (17.5)$$

Виконуючи аналогічні операції щодо другого рівняння Максвелла, отримаємо

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_a} \text{grad } \rho. \quad (17.6)$$

Ці рівняння називають хвильовими неоднорідними рівняннями або неоднорідними рівняннями Даламбера:

Для вільного простору, в якому відсутні струми  $\vec{j}$  та заряди  $\rho$ , отримаємо однорідні хвильові рівняння Даламбера.

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (17.7)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (17.8)$$

Ці рівняння описують хвильові поля, що поширюються в просторі. Розв'язання цих рівнянь полягає у знаходженні шести невідомих – трьох проєкцій вектора  $\vec{H}$  та трьох проєкцій вектора  $\vec{E}$ . Для зменшення кількості невідомих додатково вводять скалярні і векторні потенціали, а також вектор Герца.

Векторний потенціал уже був введений для опису статичного магнітного поля і дав можливість через поняття потенціалу перейти до таких самих описів магнітного поля, як і електричного.

Векторний потенціал визначається так:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (17.9)$$

Тоді друге рівняння Максвелла запишеться так:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\text{rot } \vec{A}] = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

або

$$\text{rot} \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0.$$

Враховуючи, що завжди

$$\text{rot grad } U = 0,$$

можна записати за аналогією з формулами для розрахунку електричного поля за даними градієнта потенціалу:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } U,$$

або

$$\vec{E} = -\text{grad}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (17.10)$$

Після нескладних перетворень, аналогічних перетворенням (17.2)–(17.4), отримаємо неоднорідні хвильові рівняння Даламбера для векторного та скалярного потенціалів:

$$\nabla^2 U - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad (17.11)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{j}. \quad (17.12)$$

За відсутності зарядів отримаємо однорідні хвильові рівняння Даламбера:

$$\nabla^2 U - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (17.13)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (17.14)$$

Зауважимо, що на відміну від рівнянь (17.5)–(17.8), де потрібно знаходити шість невідомих, при розв'язанні (17.11)–(17.14) необхідно знайти лише чотири невідомі. Потім поля  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  слід розрахувати за формулами (17.9) і (17.10).

Часто вводять ще одну допоміжну функцію  $\vec{\Gamma}$ , яка називається вектором Герца. Ця функція визначається формулою

$$U = -\frac{1}{\varepsilon_a} \text{div} \vec{\Gamma}. \quad (17.15)$$

Можна показати (за допомогою формули Лоренца), що векторний потенціал

$$\vec{A} = \mu_a \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t}, \quad (17.16)$$

а вектор Герца виходить із розв'язання хвильового рівняння Даламбера

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_a} \vec{p}, \quad (17.17)$$

де  $\vec{p}$  – густина вектора електричної поляризації.

Введення вектора Герца дає змогу розв'язати задачу лише щодо трьох невідомих його проєкцій. Потім за відомим вектором Герца за

допомогою формул (17.15), (17.16) можна знайти потенціали  $\vec{A}$  і  $U$ , а потім і поля  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$ .

Для гармонійних коливань подамо  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{U}$ ,  $\vec{I}$  у вигляді

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0(\vec{r})e^{j\omega t},$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \vec{U} = \vec{U}_0(\vec{r})e^{j\omega t}, \quad \vec{I} = \vec{I}_0(\vec{r})e^{j\omega t}.$$

Унаслідок подвійного диференціювання  $\vec{E}$  за часом отримаємо вираз

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot (j\omega) \cdot (j\omega)e^{j\omega t} = -\omega^2 \vec{E}_0(\vec{r})e^{j\omega t}.$$

При підстановці других похідних у хвильові рівняння Даламбера отримаємо рівняння Гельмгольца.

Наприклад, для рівняння Даламбера (17.12) отримаємо рівняння Гельмгольца для полів та їх комплексних амплітуд відповідно:

$$\nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \vec{A} = -\dot{\mu}_a \vec{J}^{cm}$$

$$\nabla^2 \vec{A}_0 + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \vec{A}_0 = -\dot{\mu}_a \vec{J}_0^{cm}, \quad (17.18)$$

де  $\vec{J}_0^{cm}$  – комплексна амплітуда густини сторонніх струмів, створюваних, наприклад, антеною. Сторонні струми можуть мати місце в іонізованих середовищах унаслідок дії на них сторонніх електромагнітних полів.

Тут враховано, що при переході до комплексного подання поля

$$\dot{\vec{J}}_0 = g \vec{E}_0 + \vec{J}_0^{cm}, \quad (17.19)$$

та провідність  $g$  включена в комплексну діелектричну проникність.

Аналогічні рівняння Гельмгольца мають місце для гармонійних коливань електричних, магнітних полів, скалярного потенціалу та вектора Герца.

Для вільного простору рівняння Гельмгольца, отримане з рівняння Даламбера, наприклад (17.8) для напруженості електричного поля, буде мати такий вигляд:

$$\nabla^2 \vec{E}_0 + \omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a \vec{E}_0 = 0. \quad (17.20)$$

Враховуючи, що швидкість поширення електромагнітних хвиль у середовищі  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ , отримаємо  $\omega^2 \dot{\epsilon}_a \dot{\mu}_a = k^2$ , де  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове

число. Тоді рівняння Гельмгольца можна записати у такому вигляді:

$$\nabla^2 \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0.$$

Загалом хвильові рівняння Даламбера можна записати так:

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\gamma, \quad (17.21)$$

де

$$\psi = \psi(\vec{r}, t), \quad \gamma = \gamma(\vec{r}, t). \quad (17.22)$$

Хвильові рівняння Гельмгольца в загальному вигляді матимуть такий вигляд:

$$\nabla^2 \dot{\Psi} - \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\Psi} = -\dot{\gamma},$$

$$\nabla^2 \dot{\Psi}_0 - \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a \dot{\Psi}_0 = -\dot{\gamma}_0.$$

Функціями  $\Psi$  у цих рівняннях можуть бути  $U, E_x, E_y, E_z; H_x, H_y, H_z; A_x, A_y, A_z; \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ .

Права частина  $\gamma(\vec{r}, t)$ , залежно від того, щодо якої функції розв'язується рівняння Даламбера ( $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \vec{U}$  чи  $\vec{\Gamma}$ ), визначається зарядами і струмами, що знаходяться в об'ємі  $V$  (рис. 17.1).

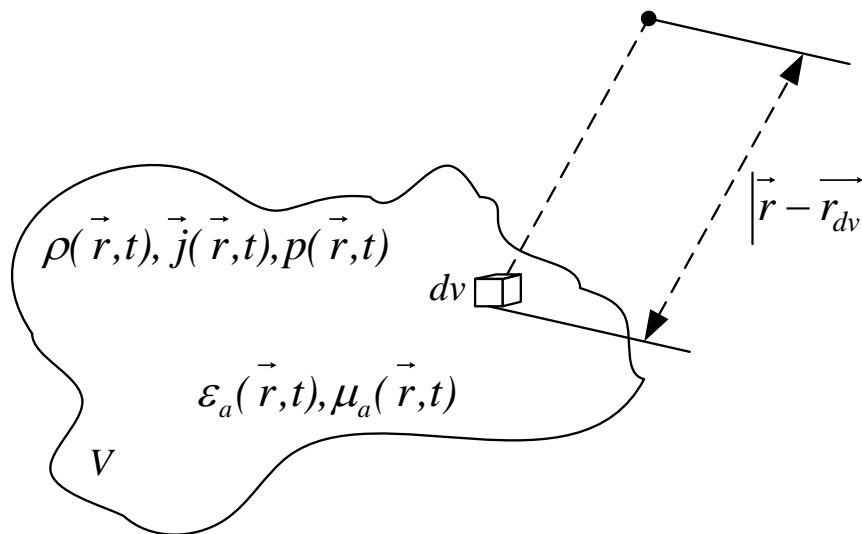


Рис. 17.1. Досліджуваний об'єм із зарядами та струмами

В об'ємі  $V$  розташована множина елементарних об'ємів  $dv$ , кожен з яких можна вважати точковим джерелом. Кожне точкове джерело в досліджуваній точці простору  $\vec{r}$  і в певний момент часу  $t$  створює своє поле. Сумарне поле як сума (інтеграл за об'ємом  $V$ ) полів, створюваних елементарними об'ємами  $dv$ . При цьому потрібно враховувати відстань від кожного елементарного об'єму  $dv$  до досліджуваної точки  $\vec{r}$  і час запізнення на поширення радіохвиль від  $dv$  до точки  $\vec{r}$ .

$$t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}_{dv}|}{v},$$

де  $\vec{r}_{dv}$  – координати об'єму  $dv$ .

Для елементарного джерела  $dv$  хвильове рівняння запишеться у вигляді, аналогічному (17.21). Кожне точкове джерело нескінченно малих розмірів  $dv$  можна помістити на початок координат, навколо якого простір вважатиметься незаповненим зарядами і струмами. Тоді рівняння Даламбера для такого джерела  $dv$  можна записати як однорідне хвильове рівняння, що справедливе для всіх точок об'єму, крім початку координат:

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.23)$$

У сферичній системі координат це рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2\partial \psi}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.24)$$

Однак для точкового джерела, через сферичну симетрію, можна вважати, що функція  $\psi$  залежить лише від  $r$ .

Тоді хвильове рівняння спроститься і набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2\partial \psi}{r\partial r} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.25)$$

Введемо змінну  $\varphi = r\psi$ ,  $\psi = \frac{\varphi}{r}$ .

Отримаємо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (17.26)$$

Перевіримо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} = \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi \right)' = r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} = r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= r \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial (r\varepsilon_a \mu_a)^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (17.27)$$



Позначивши  $r\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = \frac{r}{v} = \eta$ , де  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}$  – швидкість поширення радіохвиль, рівняння (17.27) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (17.28)$$

Таке рівняння вже розв'язано (див. лекцію 13). Розв'язком будуть хвилі:

$$\varphi = \varphi_1(t - \eta) + \varphi_2(t + \eta).$$

Враховуючи, що  $\varphi = r\psi$ , а  $\eta = \frac{r}{v}$ , отримаємо

$$\psi = \frac{\varphi}{r} = \frac{\varphi_1(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{\varphi_2(t + \frac{r}{v})}{r}. \quad (17.29)$$

Це дві сферичні хвилі, одна з яких поширюється з початку координат (рис. 17.2).

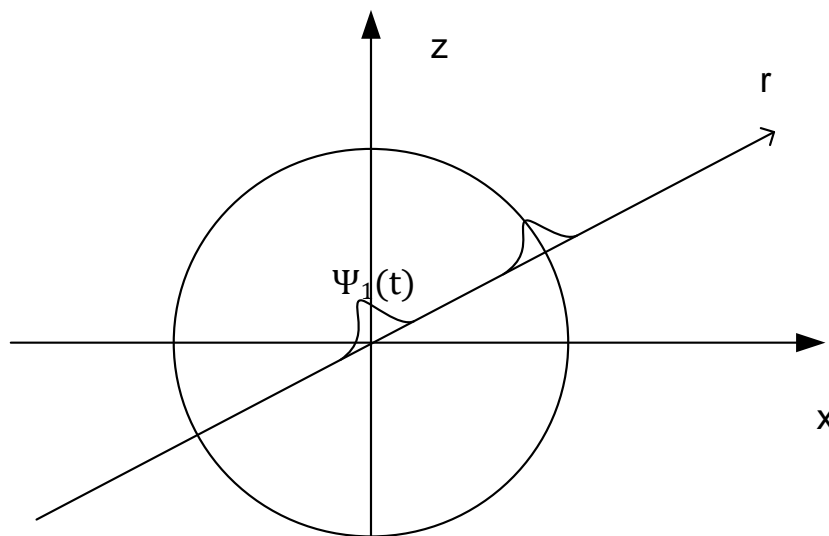


Рис. 17.2. Поширення сферичної хвилі з початку координат

Інша йде з нескінченності на початок координат (фізичного сенсу не має). Тому є сенс розглядати лише одну хвилю.

$$\psi = \frac{\varphi_1(t - \frac{r}{v})}{r}. \quad (17.30)$$

Перш ніж отримати остаточні розв'язки рівнянь (17.11), (17.12), (17.17), повернемося до рівнянь, що описують електростатичні та магнітостатичні поля. Тому що в цьому випадку

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Рівняння (17.11), (17.12) набудуть відомого вигляду рівнянь Пуассона, тобто

$$\nabla^2 U = 0, \quad (17.31)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (17.32)$$

Очевидно, що заряди і струми (17.31) і (17.32), на відміну від (17.11), (17.12), є постійними величинами. Ці рівняння з рівнянь Даламбера формально можна отримати, якщо вважати, що швидкість

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \infty, \quad (17.33)$$

а

$$\epsilon_a \mu_a = 0. \quad (17.34)$$

Раніше було наведено розв'язки рівнянь (17.31), (17.32). Для елемента об'єму  $dV$ , якщо його вважати точковим елементом, розв'язки (17.31), (17.32) мають вигляд

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}, \quad q = \rho dV, \quad (17.35)$$

$$\|A_x, A_y, A_z\| = \mu_a dV \left\| \frac{j_x}{4\pi r}, \frac{j_y}{4\pi r}, \frac{j_z}{4\pi r} \right\| = \frac{\mu_a \vec{j}}{4\pi r} dV. \quad (17.36)$$

Сумарний розв'язок визначається внесками всіх елементарних об'ємів, що формують поля. Тоді

$$U = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon_a r} dV, \quad (17.37)$$

$$\vec{A} = \int \frac{\mu_a \vec{j}}{4\pi r} dV. \quad (17.38)$$

У загальному вигляді рівняння Даламбера (17.21) для статичних полів набуде вигляду рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \psi = -\gamma,$$

а його розв'язання для точкового джерела  $dV$  та джерела з розподіленою функцією  $N$  дає розв'язок відповідно:

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma dV}{r}, \quad \psi = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma}{r} dV. \quad (17.39)$$

Рівняння Даламбера за наявності правого доданка дає розв'язок

$$\frac{\varphi(t - \frac{r}{v})}{r}, \quad (17.40)$$

і можна вважати, що для точкового джерела

$$\psi = \frac{\varphi(t - \frac{r}{v})}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\gamma(t - \frac{r}{v}) dV}{r}, \quad (17.41)$$

а для розподіленого об'ємом  $V$

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\gamma(t - \frac{r}{v})}{r} dV. \quad (17.42)$$

Тоді для скалярного  $U$ , векторного  $\vec{A}$  потенціалів та вектора Герца  $\vec{\Gamma}$  маємо такі розв'язки рівняння Даламбера:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho(t - \frac{r}{v})}{r} dV, \quad (17.43)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(t - \frac{r}{v})}{r} dV, \quad (17.44)$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{v})}{r} dV. \quad (17.45)$$

Потенціали  $U$  і  $\vec{A}$  та вектор Герца  $\vec{\Gamma}$  називають запізнілими потенціалами. Зауважимо, якщо у рівняннях Даламбера прийняти умови (17.33), (17.34), тобто  $v = \infty$ , а  $\epsilon_a \mu_a = 0$ , то приходимо до рівнянь Пуассона (17.31), (17.32), а розв'язки (17.43), (17.44) переходять у розв'язки (17.37), (17.38).

Для гармонійних коливань вирази (17.43), (17.44), (17.45) знаходяться з відповідних хвильових рівнянь Гельмгольца і відповідно:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\dot{\rho}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r} dV, \quad (17.46)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{J}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r} dV, \quad (17.47)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_0 e^{j\omega t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\dot{\vec{P}}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r} dV. \quad (17.48)$$

### Контрольні запитання

1. Наведіть математичні вирази рівнянь Даламбера у вільному просторі, в якому відсутні струми  $\vec{j}$  та заряди  $\rho$ .
2. З якою метою при розв'язанні хвильового рівняння Даламбера вводять вектор Герца?
3. Наведіть математичні вирази для  $\dot{U}$ ,  $\vec{A}$  та  $\vec{F}$ , що відповідають розв'язанню хвильових рівнянь Гельмгольца у випадку поширення в просторі гармонійних коливань.

## Лекція 18 НАЙПРОСТІШІ ВИПРОМІНЮВАЧІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

До найпростіших випромінювачів відносять диполь Герца у вигляді невеликого лінійного провідника і елементарну рамку зі струмом (рис. 18.1).

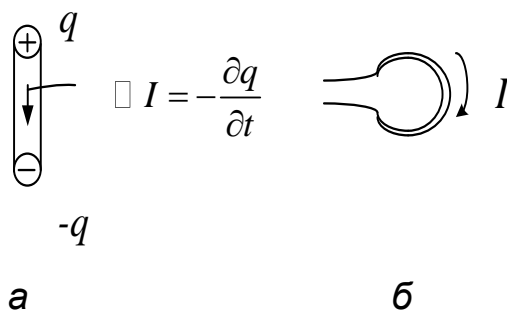


Рис. 18.1. Найпростіші випромінювачі: *а* – диполь Герца; *б* – елементарна рамка зі струмом

Поля цих випромінювачів можна описати тими самими формулами, якщо разом із поняттям електричного струму запровадити поняття магнітного струму. Їх поля будуть збігатися з точністю до заміни в формулах для  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  деяких співмножників.

### 18.1. Диполь Герца

Диполь Герца фізично можна подати у вигляді вібратора, що складається з двох провідників, на кінцях якого розташовані змінні в часі заряди (рис. 18.2).

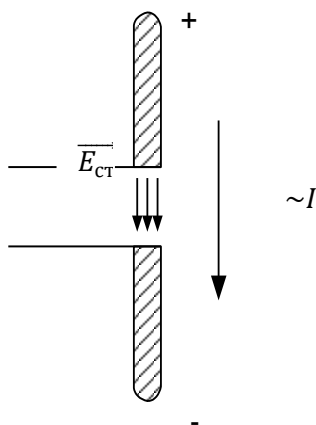


Рис. 18.2. Диполь Герца

Струм  $I$  замикається у проміжку між провідниками струмом зміщення  $\frac{d\vec{E}_{\text{стор}}}{dt}$ , створюваним змінним стороннім полем, що утворюється з допомогою підключення провідників до ЕРС стороннього джерела.

Для диполя Герца як лінійного провідника довжиною  $l$  векторний запізнювальний потенціал

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{\vec{j}\left(t - \frac{r}{v}\right) S l}{r} = \frac{\mu_a}{4\pi r} I \left(t - \frac{r}{v}\right) \vec{l}. \quad (18.1)$$

Вектор Герца

$$\vec{Z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right) \vec{l}}{4\pi\epsilon_a r} = \frac{\vec{P}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon_a r}, \quad (18.2)$$

де величину

$$\vec{P} = q\vec{l} \quad (18.3)$$

називають дипольним моментом.

Для гармонійних хвиль

$$\vec{A} = \frac{\dot{\mu}_a}{4\pi} \frac{\dot{I}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r} \vec{l}. \quad (18.4)$$

Знаючи  $\vec{A}$ , можна знайти  $\vec{H}$ , оскільки

$$\vec{B} = \dot{\mu}_a \vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (18.5)$$

Знаючи  $\vec{H}$  з першого рівняння Максвелла (у зведеному просторі поза диполем), можна знайти  $\vec{E}$

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega \dot{\epsilon}_a \vec{E}, \quad (18.6)$$

$$\vec{E} = \frac{\text{rot} \vec{H}}{j\omega \dot{\epsilon}_a}. \quad (18.7)$$

Для спрощення обчислень помістимо центр диполя на початку координат, а диполь орієнтуємо вздовж осі  $z$  (рис. 18.3).

У цьому випадку маємо лише одну проекцію  $A_z$  на вісь  $z$  у декартовій системі координат

$$\dot{A}_z = \frac{\dot{\mu}_a}{4\pi} \frac{\dot{I}_0 l e^{j(\omega_0 t - kr)}}{r}. \quad (18.8)$$

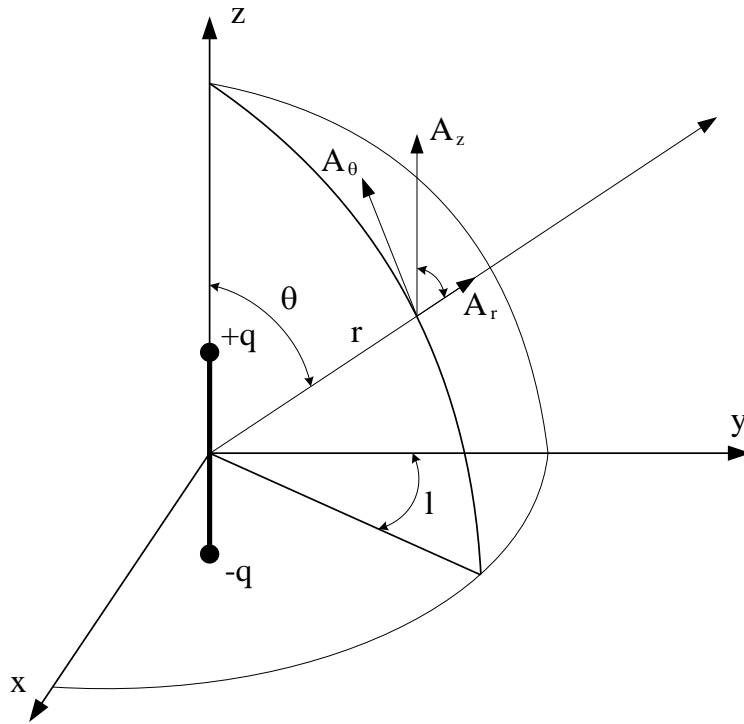


Рис. 18.3. Векторний потенціал диполя Герца

У сферичній системі координат

$$\dot{A}_r = \dot{A}_z \cos \theta, \quad \dot{A}_\theta = -\dot{A}_z \sin \theta, \quad \dot{A}_\varphi = 0.$$

Через сферичну симетрію

$$\dot{A}_\varphi = 0, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} = \left\| \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi}, \frac{\partial \dot{A}_\theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial \varphi} \right\| = \vec{0} = \|0, 0, 0\|. \quad (18.9)$$

Записуючи вирази для операції ротора у сферичній системі координат

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{A}_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial \dot{A}_\theta}{\partial \varphi} \right] \cdot \vec{l}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_\varphi) \right] \cdot \vec{l}_\theta + \\ & + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{A}_\theta) - \frac{\partial \dot{A}_r}{\partial \theta} \right] \cdot \vec{l}_\varphi \end{aligned} \quad (18.10)$$

і враховуючи (18.9), знаходимо, що єдина проекція  $\dot{H}_\varphi$  ( $\dot{H}_r = \dot{H}_\theta = 0$ ) дорівнює

$$\dot{H}_\varphi = \frac{l}{4\pi} \left( \frac{jk \dot{I}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r} + \frac{\dot{I}_0 e^{j(\omega t - kr)}}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (18.11)$$

Ліву та праву частини цієї рівності можна скоротити на часовий множник  $e^{j\omega t}$ , залишивши лише просторову частину. Помноживши та розділивши праву частину на  $k^2$ , отримаємо

$$\dot{H}_\varphi = \frac{k^2 \dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{j}{kr} \right) \sin \theta, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (18.12)$$

Електричний вектор

$$\vec{E} = \frac{\text{rot} \vec{H}}{j\omega \dot{\epsilon}_a},$$

очевидно, перпендикулярний до  $H_\varphi$  і має лише два компоненти

$$\dot{E}_r = \frac{\text{rot}_r \vec{H}}{j\omega \dot{\epsilon}_a}, \quad \dot{E}_\theta = \frac{\text{rot}_\theta \vec{H}}{j\omega \dot{\epsilon}_a}. \quad (18.13)$$

Замінюючи у формулі (18.10) для вектора ротора вектор  $\vec{A}$  на вектор  $\vec{H}$ , отримаємо

$$\dot{E}_r = -jk^2 \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{2\pi\omega \dot{\epsilon}_a} \left( \frac{1}{k^2 r^3} + \frac{j}{kr^2} \right) \cos \theta, \quad (18.14)$$

$$\dot{E}_\theta = -jk^2 \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi\omega \dot{\epsilon}_a} \left( \frac{1}{k^2 r^3} + \frac{j}{kr^2} - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \quad (18.15)$$

Оскільки  $k = 2\pi/\lambda$ , то формули (18.12), (18.13) доцільно записати у вигляді

$$\dot{H}_\varphi = \frac{k^2 \dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi} \left[ \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 + j \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \right] \sin \theta, \quad (18.16)$$

$$\dot{E}_r = -jk^3 \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{2\pi\omega \dot{\epsilon}_a} \left[ \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 + j \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \right] \cos \theta, \quad (18.17)$$



$$\dot{E}_\theta = -jk^3 \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi\omega\dot{\epsilon}_a} \left[ \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 + j \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 + \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \right] \sin\theta. \quad (18.18)$$

## 18.2. Зони електромагнітного поля, що створюється у просторі навколо вібратора Герца

Розрізняють ближню, проміжну та дальню зону поля вібратора. Ці зони залежать від співвідношення довжини хвилі випромінювання та дальності.

Якщо  $\frac{r}{\lambda} \ll 1$ , то переважаючими у формулах (18.16)–(18.18) є складові з множниками  $\left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2$  та  $\left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3$ .

Зона, що задовольняє цій умові, називається зоною індукції або ближньою зоною. Для  $e^{-jkr} \approx 1$  цієї зони  $kr \ll 1$

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{\dot{I}_0 l}{4\pi r^2} \sin\theta, \quad (18.19)$$

$$\dot{E}_r \approx -j \frac{\dot{I}_0 l}{2\pi\omega\dot{\epsilon}_a r^3} \cos\theta, \quad (18.20)$$

$$\dot{E}_\theta \approx -j \frac{\dot{I}_0 l}{4\pi\omega\dot{\epsilon}_a r^3} \sin\theta. \quad (18.21)$$

Знак  $j$  вказує, що поля  $H$  і  $E$  у часі зсунуті на  $90^\circ$  (як комплексні числа  $E_r$  і  $E_\theta$  містять лише уявну частину, яка на комплексній площині відкладається перпендикулярно до дійсної).

Тоді вектор Умова – Пойнтінга ( $H_\varphi \perp E_r$  і  $H_\varphi \perp E_\theta$ )

$$\Pi = \frac{E H}{2} \quad (18.22)$$

коливається з подвійною частотою  $\omega$  (рис. 18.4).

Це свідчить про те, що в одну чверть періоду енергія витікає з диполя, а в іншу – повертається.

При  $r > \lambda$  це поле швидко зменшується зі збільшенням  $r$ .

Далека зона характеризується умовою  $r \gg \lambda$ . І тут переважають члени порядку  $\frac{1}{r}$ , а поля  $H$  та  $E$  мають вигляд

$$\dot{H}_\varphi \approx jk \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta, \quad (18.23)$$

$$\dot{E}_\theta \approx jk^2 \frac{\dot{I}_0 l e^{-jkr}}{4\pi r \omega \dot{\epsilon}_a} \sin \theta, \quad (18.24)$$

$$\dot{E}_r = 0.$$

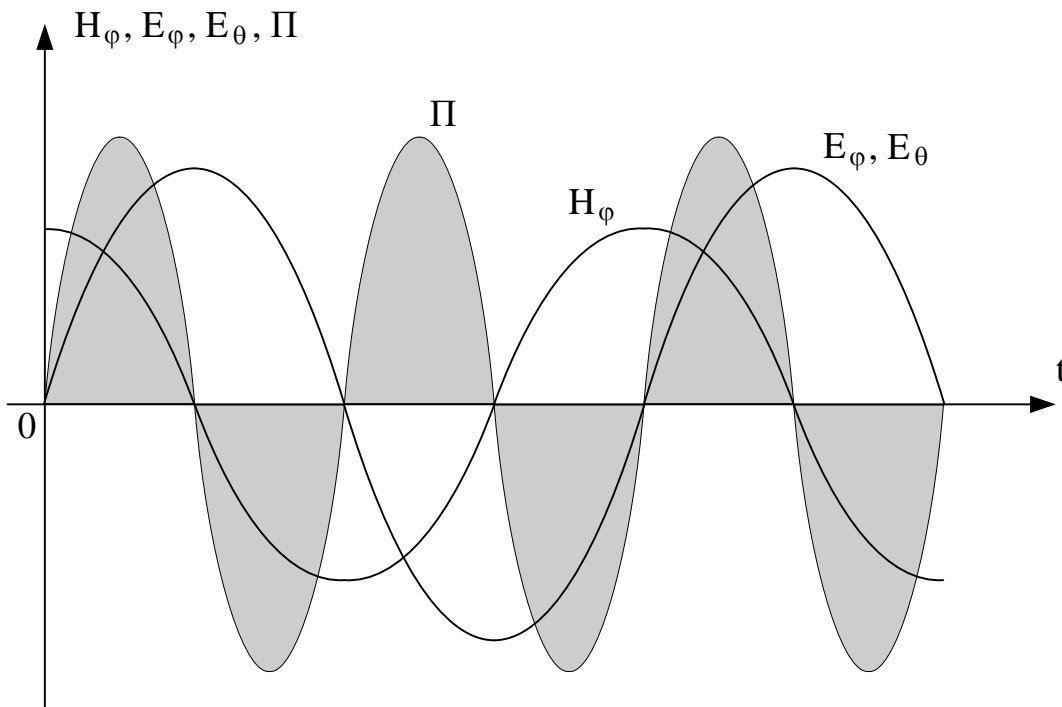


Рис. 18.4. Коливання вектора Умова – Пойнтінга

Ці поля коливаються синфазно і вектор  $\vec{\Pi}$  завжди позитивний, тобто енергія в дальній зоні віддаляється від диполя. Причому вектори  $\dot{H}_\varphi$  і  $\dot{E}_\theta$  перпендикулярні до напрямку  $\vec{r}$ . У проміжній зоні поле визначається вихідними формулами (18.16)–(18.18) та є змішаним.

### 18.3. Потужність випромінювання диполя

Раніше було отримано формулу для середньої потужності випромінювання

$$P_{cp} = \iint_S \Pi_{cp} dS, \quad (18.25)$$

$$\Pi_{cp} = \frac{E_{0\theta} H_{0\varphi}}{2}, \quad (18.26)$$

де

$$E_{0\theta} = \frac{k^2 I_o l}{4\pi r \omega \varepsilon_a} \sin \theta, \quad (18.27)$$

$$H_{0\varphi} = \frac{k I_o l}{4\pi r} \sin \theta \quad (18.28)$$

– амплітудні значення полів  $E_\theta$  і  $H_\varphi$  (вважаємо величину  $\varepsilon_a$  дійсною).  
Формулу (18.27) можна спростити, якщо одержати її з формули (18.28), помноживши  $H_\varphi$  на хвильовий опір  $\rho$

$$E_{0\theta} = \rho H_{0\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{k I_o l}{4\pi r} \sin \theta. \quad (18.29)$$

У вільному просторі (вакуумі)  $\rho = 120\pi \text{ Ом}$ . Тоді

$$E_{0\theta} = \frac{30k I_o l}{r} \sin \theta. \quad (18.30)$$

Середнє значення вектора Умова – Пойнтінга у вільному просторі

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{2} \frac{30k I_o l}{r} \sin \theta \cdot \frac{k I_o l}{4\pi r} \sin \theta = \frac{30k^2 I_o^2 l}{8\pi r^2} \sin^2 \theta. \quad (18.31)$$

Вважаючи, що поверхня  $S$  – це сфера (результат буде однаковий при використанні будь-якої поверхні, що оточує диполь), отримуємо, що

$$P_{cp} = \iint_S \Pi_{cp} dS = \frac{30k^2 I_o^2 l^2}{8\pi} \iint_S \frac{dS}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (18.32)$$

Тут  $\frac{dS}{r^2} = d\Omega$  – елемент тілесного кута. Елемент тілесного кута у сферичній системі координат

$$d\Omega = \sin \theta d\varphi.$$

Замінивши інтегрування  $S$  інтегруванням по  $\Omega$ , отримуємо

$$\int_{\Omega} \sin^2 \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta, \quad (18.33)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \left( -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = -[-1-1] + \frac{1}{3}(-1-1) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Тоді

$$P_{cp} = \frac{30k^2 I_0^2 l}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{30}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot k^2 I_0^2 l^2 = 10k^2 I_0^2 l^2. \quad (18.34)$$

Оскільки  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то

$$P_{cp} = 10k^2 I_0^2 l^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 400 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (18.35)$$

Зауважимо, що  $P_{cp}$  має розмірність потужності, оскільки у формулу підставлялася величина  $\rho = 120\pi \text{ Ом}$ .

#### 18.4. Опір випромінювання

На підставі класичної формули

$$P_{cp} = \frac{I_0^2 R_{випр}}{2}, \quad (18.36)$$

тобто враховуючи, що  $P_{cp}$  пропорційна  $I_0$  і  $R_{випр}$ , знаходимо, що

$$R_{випр} = \frac{2P_{cp}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 800 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (18.37)$$

Цей опір характеризує випромінювальну здатність диполя. Чим більше  $P_{cp}$ , тим більше  $R_{випр}$ .

На звичайному опорі  $R$  витрачається потужність (18.36). Тут потужність  $P_{cp}$  йде в простір і її мірою може бути величина добутку квадрата струму на еквівалентний опір  $R_{випр}$ .

#### 18.5. Діаграма спрямованості диполя

Діаграма спрямованості (ДС) диполя характеризує розподіл поля чи потужності за кутовими координатами  $\theta$  і  $\varphi$ . Розрізняють діаграми спрямованості за напруженістю та потужністю.

Зручно користуватися нормованими діаграмами спрямованості.

За напруженістю полів

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|E_\theta(\theta, \varphi)|}{E_\theta \max} = \frac{|H_\theta(\theta, \varphi)|}{H_\theta \max} = |\sin \theta|. \quad (18.38)$$

За потужністю

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{P_{cp}(\theta, \varphi)}{P_{cp \max}} = \sin^2 \theta. \quad (18.39)$$

Очевидно, що ДС диполя Герца від  $\varphi$  не залежить.

Вигляд ДС  $F(\theta, \varphi)$  показаний на рис. 18.5.

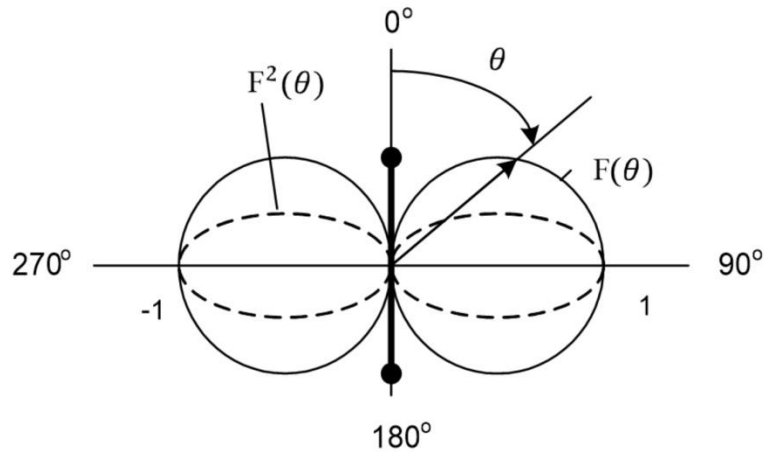


Рис. 18.5. Діаграма спрямованості диполя Герца

Для рамки зі струмом отримаємо аналогічні співвідношення, якщо введемо поняття магнітного струму.

ДС рамки

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|E_\varphi(\theta, \varphi)|}{E_\varphi \max} \quad (18.40)$$

показано на рис. 18.6.

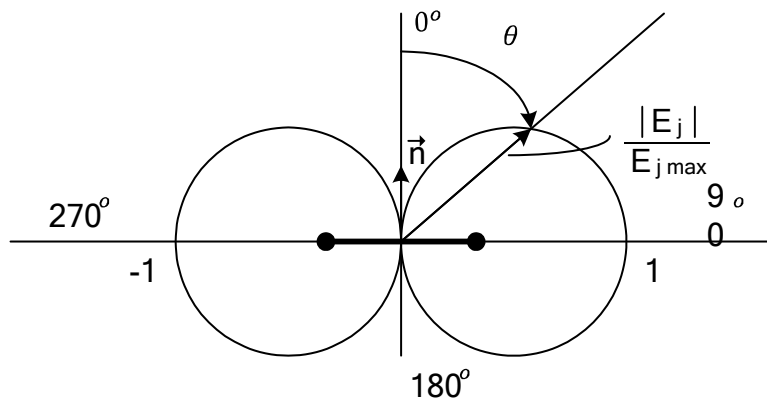


Рис. 18.6. Діаграма спрямованості елементарної рамки

На рис. 18.7 показані силові лінії магнітного та електричного полів для рамки (а) та диполя Герца (б).

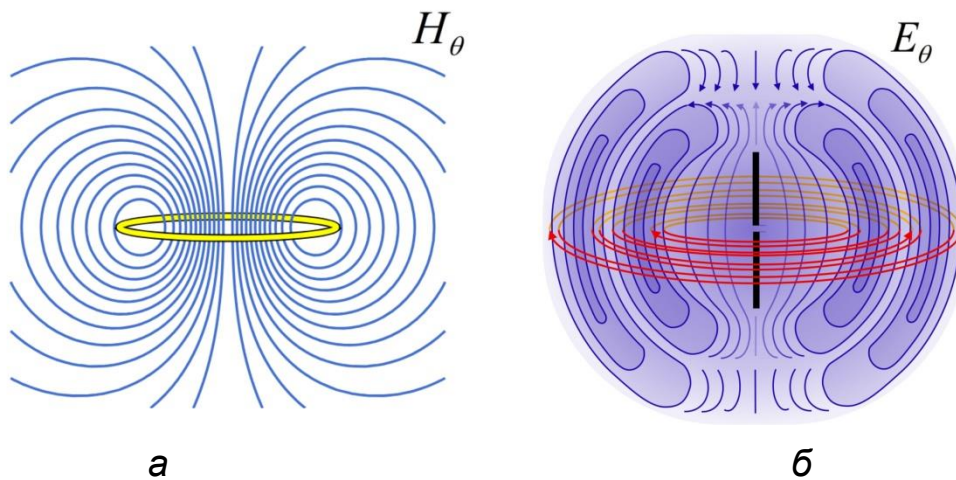


Рис. 18.7. Структури силових ліній полів  $H_\theta$  та  $E_\theta$  для елементарної рамки (а) та диполя Герца (б)

### Контрольні запитання

1. Наведіть математичні вирази, що описують електричні та магнітні складові електромагнітного поля навколо диполя Герца для всіх можливих координат  $r$ .
2. Які зони електромагнітного поля існують навколо елементарних випромінювачів і які умови їм відповідають?
3. Від яких параметрів залежить потужність випромінювання диполя?
4. Що характеризує діаграма спрямованості елементарного випромінювача?

## Лекція 19

### ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НВЧ-ДІАПАЗОНУ

У НВЧ-діапазоні радіохвилі передаються не лише двопровідними лініями. Передача енергії по двопровідних лініях використовується дуже рідко, оскільки при розмірах цих ліній, які можна порівняти з довжиною хвилі або є більшими за неї, мають місце значні втрати енергії за рахунок випромінювання. Найчастіше енергія передається по коаксіальних кабелях, металевих або діелектричних хвилеводах, а також смужкових і мікросмужкових лініях. Останні все частіше застосовуються в сучасних радіотехнічних пристроях та системах, забезпечуючи поряд із застосуванням у них різних інтегральних мікросхем необхідну мікромініатюризацію.

На рис. 19.1 показано найбільш поширені лінії передачі енергії НВЧ-хвиль: *а* – двопровідна лінія; *б* – коаксіальна лінія; *в* – смужкова несиметрична лінія, *г* – симетрична смужкова лінія; *д* та *е* – хвилеводи прямокутного та круглого перерізу; *ж* – діелектрична лінія.

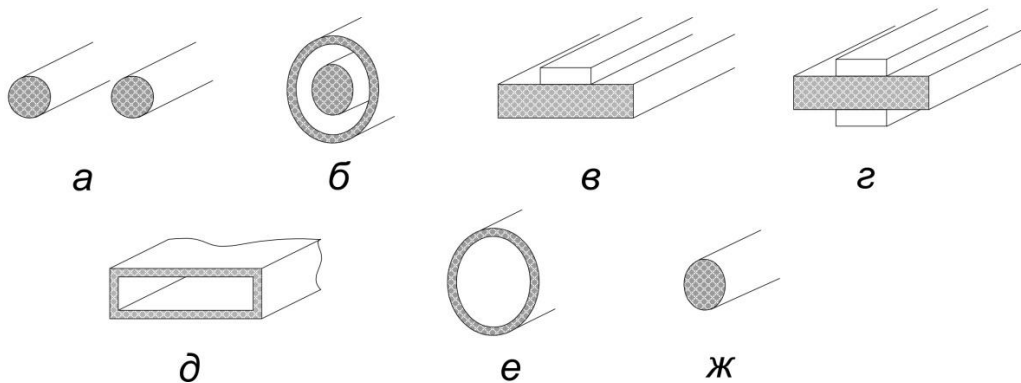


Рис. 19.1. Лінії передачі електромагнітних хвиль

#### 19.1. Основні типи електромагнітних хвиль у напрямних середовищах

Розрізняють поперечні електромагнітні хвилі (Т-хвилі), електричні (Е-хвилі), магнітні (Н-хвилі) та гібридні. Поперечні хвилі часто позначають символом ТЕМ, електричні Е-хвилі часто називають поперечно-магнітними та позначають символом ТМ, магнітні Н-хвилі часто називають поперечно-електричними та позначають символом ТЕ. У Т-хвиль (ТЕМ) існують лише поперечні компоненти поля  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  і  $H_y$  та відсутні поздовжні компоненти  $E_z$  і  $H_z$ . У Е-хвиль (ТМ) поруч із поперечними компонентами є поздовжня електрична компонента поля  $E_z$ . При цьому  $H_z = 0$ . У Н-хвиль

(TE) поряд з поперечними компонентами є поздовжня магнітна компонента  $H_z$  ( $E_z = 0$ ). Гібридні хвилі містять усі компоненти.

У останньому випадку поперечні хвилі можна розглядати як Т, Е, Н-хвилі, змінюючи напрямки вектора Умова – Пойнтінга щодо осі z (рис. 19.2).

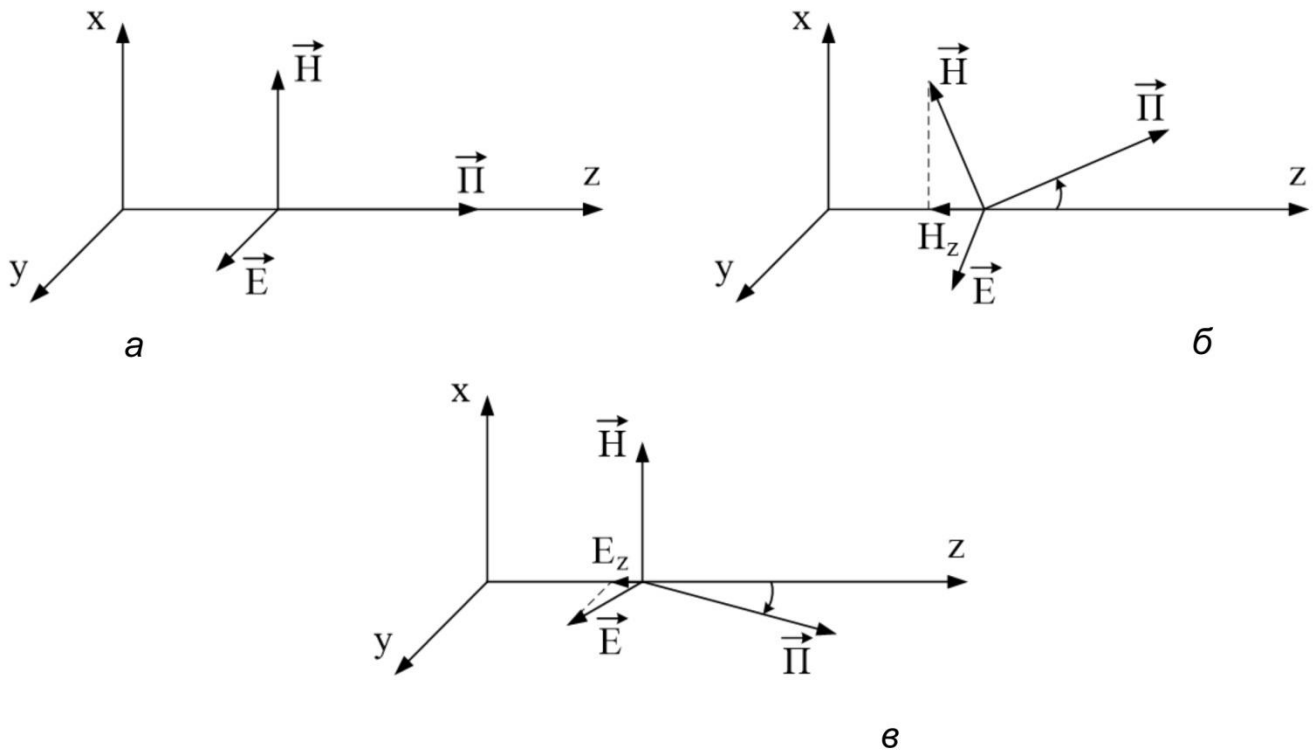


Рис. 19.2. Типи електромагнітних хвиль: а – Т-хвиля; б – Н-хвиля; в – Е-хвиля

На рис. 19.2 характер хвиль залежить від системи координат, хоча насправді хвиля має поперечний характер. Однак у хвилеводах, у середовищах зі змінним показником заломлення тощо вектор Умова – Пойнтінга змінює свій напрямок щодо осі z. У цьому випадку характер хвилі щодо спрямування z може відповідати якомусь із зазначених типів.

Так, наприклад, у прямокутному хвилеводі хвиля може рухатися такою траєкторією, як показано на рис. 19.3, відбиваючись від стінок хвилеводу. І тут виникають поздовжні складові полів.

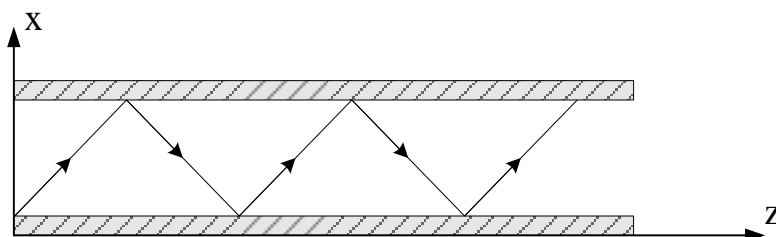




Рис. 19.3. Поширення електромагнітних хвиль у хвилеводі

Слід зазначити, що з випадків, показаних на рис. 19.2 а, б, фазові швидкості поширення хвилі вздовж вектора  $\vec{\Pi}$  та вздовж осі  $z$  різні (рис. 19.4).

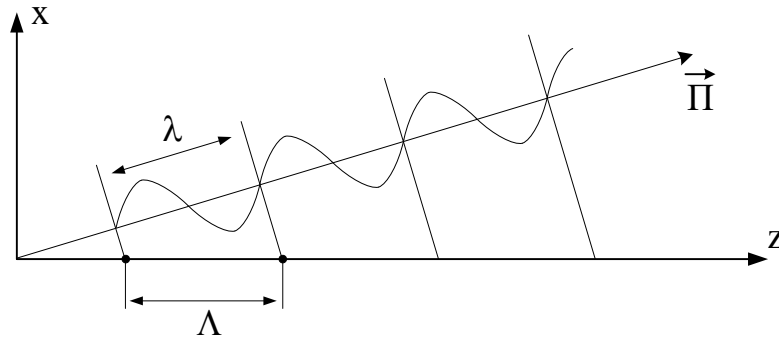


Рис. 19.4. Проекція хвилі на вісь  $z$

Це пов'язано з тим, що реальна довжина хвилі дорівнює  $\lambda$ , а довжина хвилі  $\Lambda$ , відповідна перетинам ліній рівних фаз з віссю  $z$ , перевищує реальну довжину хвилі.

Очевидно, що якщо фазова швидкість уздовж напрямку  $\vec{\Pi}$  дорівнює швидкості світла в порожньому просторі, то вздовж осі  $z$  ця швидкість може дорівнювати навіть нескінченності (якщо  $\vec{\Pi}$  спрямований уздовж осі  $x$ ). Протириччя тут немає. Фазова швидкість не є швидкістю перенесення енергії. Швидкість перенесення енергії, яка називається груповою швидкістю, відрізняється від фазової швидкості і більше швидкості світла бути не може.

Як співвідносяться між собою фазова та групова швидкості, можна пояснити на прикладі наближення до берега морських хвиль за деяким кутом  $\varphi$  (рис. 19.5).

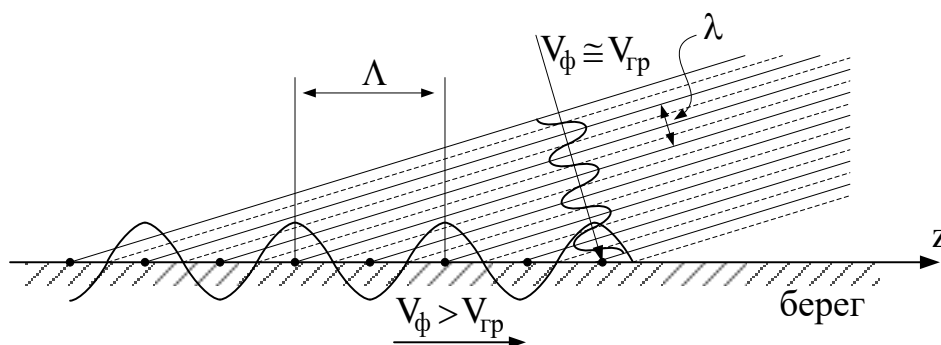


Рис. 19.5. Фазові та групові швидкості морських хвиль

У напрямку руху хвилі до берега, тобто у напрямку, перпендикулярному фронту хвилі (поверхні або лінії рівних фаз), групова швидкість приблизно дорівнює фазовій швидкості і дорівнює швидкості поширення енергії хвиль. Висока швидкість руху хвилі вздовж берегової лінії, що часто спостерігається, є фазовою. Вздовж берега фазова швидкість хвиль значно перевищує зазначені вище фазову і групову швидкості в напрямку перпендикулярному фронту хвилі, і не пов'язана з перенесенням енергії.

Коли говорять про групову швидкість, то мають на увазі швидкість руху групового пакета хвиль, наприклад, випромінюваного короткого імпульсу, який відповідно до теорії перетворень Фур'є можна подати у вигляді суми (кінцевої або нескінченної) гармонійних хвиль. Якщо середовище не має дисперсії за швидкістю (у середовищах з дисперсією швидкості поширення окремих гармонік будуть різними), то хвильовий пакет переноситься без спотворень і в цьому випадку фазова та групову швидкості практично рівні.

Для обчислення групової швидкості розглянемо хвилю, що складається із суми двох гармонік, близьких за частотою,

$$E = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z).$$

Відповідно до відомої формули тригонометрії

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

маємо

$$E = 2E_0 \cos \left( \frac{\Delta \omega t}{2} - \frac{\Delta k z}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z \right).$$

Це биття, високочастотна компонента яких промодульована низькочастотною обвідною  $2E_0 \cos \left( \frac{\Delta \omega t}{2} - \frac{\Delta k z}{2} \right)$  (рис. 19.6).

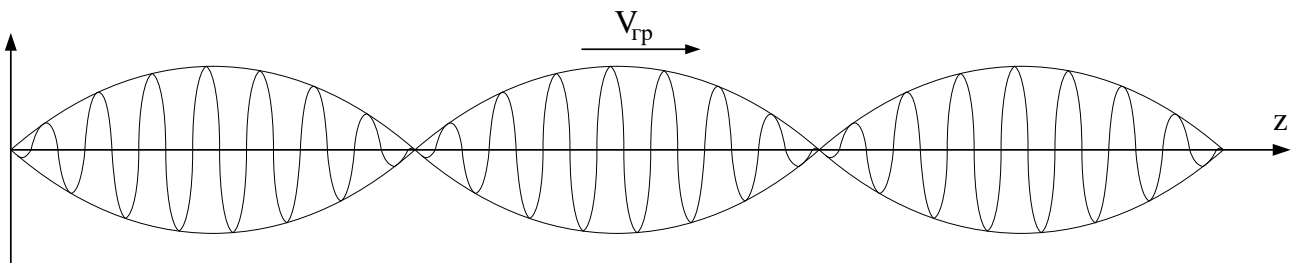


Рис. 19.6. До визначення фазової та групової швидкості

Необхідно розібратися, з якою швидкістю рухається обвідна.

Хвильове число  $k$ , як відомо, одно

$$k = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = v_\phi k, \quad (19.1)$$

де  $v_\phi$  – фазова швидкість хвилі.

Аналогічно для обвідної,

$$\begin{aligned} E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2} - \frac{\Delta kz}{2}\right) &= E_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{\Delta kz}{\Delta\omega}\right) = \\ &= E_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{z}{v_{gp}}\right) = E_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}(t - t_3), \end{aligned}$$

де  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_{gp}$  – групова швидкість руху хвильового пакета у вигляді обвідної;

$t_3 = \frac{z}{v_{gp}}$  – час затримки обвідної;  $\Delta k = \frac{\Delta\omega}{v_{gp}}$  – аналог хвильового числа для обвідної.

У загальному випадку

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (19.2)$$

Оскільки  $\omega = v_\phi k$  відповідно до (19.1), то

$$\begin{aligned} v_{gp} &= \frac{d}{dk}(v_\phi k) = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = \\ &= v_\phi + k \frac{dv_\phi}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k v_{gp} \frac{dv_\phi}{d\omega}. \end{aligned}$$

Звідки

$$v_{gp} = \frac{v_\phi}{1 - k \frac{dv_\phi}{d\omega}}. \quad (19.3)$$

Якщо середовище є недисперсійним, тобто фазові швидкості гармонік однакові, тобто  $\frac{dv_\phi}{d\omega} = 0$ , то  $v_{gp} = v_\phi$ . Для середовищ із нормальною

дисперсією ( $\frac{dv_\phi}{d\omega} < 0$ )  $v_{gp} < v_\phi$ . Для середовищ з аномальною дисперсією

( $\frac{dv_\phi}{d\omega} > 0$ )  $v_{gp} > v_\phi$ . Але незалежно від того, в якому середовищі поширюються хвилі, групова швидкість менша за швидкість світла і практично дорівнює швидкості поширення електромагнітної енергії.

## 19.2. Прямокутний хвилевід

Вважатимемо, що провідність стін хвилеводу дорівнює нескінченності. Заряди та струми у хвилеводі також відсутні. Поле всередині хвилеводу задовольняє рівнянню Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega \varepsilon_a \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \mu_a \vec{H} \end{aligned} \quad (19.4)$$

та граничним умовам.

Основною граничною умовою є рівність нулю тангенціальної компоненти поля на стінках хвилеводу, тобто

$$E_{tg} = 0 \quad (19.5)$$

при  $x=0, x=a, y=0, y=b$  (рис. 19.7).

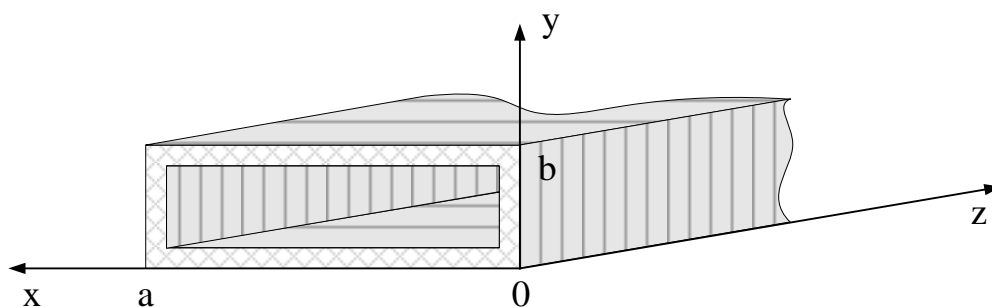


Рис. 19.7. Прямокутний хвилевід

Враховуючи загальну формулу для ротора довільного вектора  $\vec{A}$  у прямокутній системі координат

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left\| \operatorname{rot}_x \vec{A}, \operatorname{rot}_y \vec{A}, \operatorname{rot}_z \vec{A} \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial z}, \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial x}, \frac{\partial \vec{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial y} \right\|, \quad (19.6)$$

знайдемо вираз для проєкцій рівнянь Максвелла, припускаючи, що коливання мають гармонійний характер. Хвиля у хвилеводі при цьому матиме вигляд

$$\dot{A} = A_0 e^{j\omega(t+\varphi)} e^{-\beta_g z}. \quad (19.7)$$

Похідна поля змінної  $z$

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial z} = -\beta_g \dot{A}. \quad (19.8)$$

Як далі буде видно, стала поширення  $\beta_e$  у хвилеводі (аналог хвильового числа) може бути і чисто уявною, і дійсною величиною.

Похідна за  $t$

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial t} = j\omega \dot{A}. \quad (19.9)$$

Враховуючи ці вирази для похідних, отримаємо рівняння Максвелла у проєкціях для комплексних амплітуд полів (загальний множник  $e^{j\omega t - \beta_e z}$  ліворуч і праворуч у цих рівняннях можна скоротити):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \beta_e \dot{H}_y = j\omega \varepsilon_a E_x \\ -\beta_e \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon_a E_y \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon_a E_z \end{array} \right. \quad (19.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \beta_e E_y = -j\omega \mu_a H_x \\ -\beta_e \dot{E}_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu_a H_y \end{array} \right. \quad (19.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_a H_z \end{array} \right. \quad (19.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \beta_e E_y = -j\omega \mu_a H_x \end{array} \right. \quad (19.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\beta_e \dot{E}_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu_a H_y \end{array} \right. \quad (19.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_a H_z \end{array} \right. \quad (19.15)$$

Ця система рівнянь дає можливість поперечні компоненти поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$  виразити через поздовжні. Дійсно, підставимо в рівняння (19.10) значення  $\dot{H}_y$  з рівняння (19.14):

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \beta_e \left[ \frac{1}{j\omega \mu_a} \left( \beta_e \dot{E}_x + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right) \right] = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x.$$

Аналогічно підставимо (19.13) у (19.11), потім (19.10) у (19.14), (19.11) у (19.13) і знайдемо

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{1}{k_c^2} \left( \beta_\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) \\ \dot{E}_y &= \frac{1}{k_c^2} \left( \beta_\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\omega\mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \\ \dot{H}_x &= \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \beta_\varepsilon \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \\ \dot{H}_y &= -\frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \beta_\varepsilon \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (19.16)$$

де

$$k_c^2 = \beta_\varepsilon^2 + k^2, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (19.17)$$

З виду цих рівнянь слідує висновок, що поздовжні компоненти відсутні ( $E_z$  і  $H_z$ ), а поперечні ( $E_x, E_y, H_x, H_y$ ) дорівнюють нулю. Тобто суто поперечні хвилі (хвилі типу «Т») (як у порожньому просторі), у яких  $E_z$  і  $H_z$  рівні нулю, у хвилеводі існувати неспроможні.

Якщо у (19.16) бачимо, що  $H_z \neq 0$ , а  $E_z = 0$ , то маємо хвилю типу «Н» (Н-хвилю) з такими значеннями напруженості  $E_x, E_y, H_x, H_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{j\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \quad \dot{E}_y = \frac{j\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \\ \dot{H}_x &= -\frac{\beta_\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \quad \dot{H}_y = -\frac{\beta_\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (19.18)$$

Якщо вважати, що у формулах (19.16)  $E_z \neq 0$ ,  $H_z = 0$ , то отримаємо значення напруженості полів  $E_x, E_y, H_x, H_y$  для хвилі типу «Е» (Е-хвилі).

Якщо підставити  $E_x, E_y$  з (19.16) до (19.15) та  $H_x, H_y$  з (19.10) до (19.14), то отримаємо такі дві незалежні між собою системи рівнянь, що є хвильовими рівняннями Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0, \quad (19.19)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{E}_z = 0. \quad (19.20)$$

Незалежність цих рівнянь свідчить про те, що рішення для Н-хвиль та Е-хвиль можна шукати незалежно, і що ці типи хвиль можуть у хвилеводі існувати незалежно.

Для того щоб знайти ці хвилі, необхідно перш за все розв'язати рівняння (19.19), (19.20) за наявності граничних умов (19.5).

Розв'язки цих рівнянь зазвичай знаходять методом поділу змінних. Знайдемо розв'язок рівняння (19.19), подавши його у вигляді

$$\dot{H}_z = \dot{X}(x)\dot{Y}(y)e^{-\beta_0 z}. \quad (19.21)$$

Підставивши цей передбачуваний розв'язок у рівняння (19.19), отримаємо

$$x''y + xy'' + k_c^2 xy = 0,$$

або

$$\frac{x''}{x} + \frac{y''}{y} = -k_c^2. \quad (19.22)$$

У рівнянні (19.22) змінні  $x$ ,  $y$  і залежні від них функції  $X$  і  $Y$  розділені. Рівність доданків у цьому рівнянні постійній величині можлива лише у разі рівності константам кожного з доданків, тобто

$$\frac{x''}{x} = -k_x^2, \quad \frac{y''}{y} = -k_y^2, \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2. \quad (19.23)$$

Це два найпростіші хвильові рівняння, які доцільно записати у вигляді

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x &= 0, \\ y'' + k_y^2 y &= 0. \end{aligned} \quad (19.24)$$

Загальні розв'язки цих двох звичайних диференціальних рівнянь відомі:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x = X_0 \cos(k_x x + \varphi_x), \\ X_0 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \varphi_x = \arctg \frac{B_1}{A_1}, \end{aligned} \quad (19.25)$$

$$\begin{aligned} Y(y) &= A_2 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y = Y_0 \cos(k_y y + \varphi_y), \\ Y_0 &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \varphi_y = \arctg \frac{B_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (19.26)$$

Тоді на підставі (19.21)

$$H_z(x, y) = (A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x)(A_2 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y)e^{-\beta_0 z}. \quad (19.27)$$

Розглянемо тепер граничні умови. Як зазначалося, тангенціальні компоненти електричних полів на стінках хвилеводу мають дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= 0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{і} \quad y=b, \\ \dot{E}_y &= 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{і} \quad x=a. \end{aligned} \quad (19.28)$$

Підставивши нульові значення цих полів у вираз (19.18), отримаємо додаткові граничні умови

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{і} \quad y=b, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{і} \quad x=a, \end{aligned} \quad (19.29)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = X(x) \left( -A_2 k_y \sin k_y y + B_2 k_y \cos k_y y \right) \Big|_{y=0}^{y=b} = 0.$$

З умови  $y=0$  випливає, що  $B_2=0$ , а з умови  $y=b$ , що  $\sin k_y b = 0$  і  $k_y = n\pi/b$ .

Аналогічно з умови

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = (-A_1 k_x \sin k_x x + B_1 k_x \cos k_x x) Y(z) \Big|_{x=0}^{x=a} = 0$$

випливає, що  $B_1=0$ ,  $\sin k_x a = 0$ ,  $k_x = m\pi/a$ , де  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Тоді очевидно, що

$$H_z = A_1 A_2 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-\beta_\epsilon z}. \quad (19.30)$$

Оскільки

$$k_c^2 = k^2 + \beta_\epsilon^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k_x = m\pi/a, \quad k_y = n\pi/b, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a,$$

то

$$\beta_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \epsilon_a \mu_a} = -jk_\epsilon, \quad (19.31)$$

де

$$k_\epsilon = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$



Визначаючи з формули (19.30) похідні  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial H_z}{\partial y}$  та підставляючи їх у формули для полів Н-хвиль (19.18), отримаємо такі значення поперечних компонент полів  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  (з точністю до множника  $e^{j\omega t}$ ):

$$\dot{E}_x = j\dot{H}_{z0} \frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{\epsilon} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_c z}, \quad (19.32)$$

$$\dot{E}_y = -j\dot{H}_{z0} \frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_c z}, \quad (19.33)$$

$$E_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{z0} \frac{j\beta_B}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_c z}, \quad (19.34)$$

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{z0} \frac{j\beta_B}{k_c^2} \frac{n\pi}{\epsilon} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_c z}, \quad (19.35)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_c z}, \quad (19.36)$$

$$\dot{H}_{z0} = \dot{H}_{z\max} e^{j\varphi},$$

де  $\varphi$  – початкова фаза.

Розглянемо функції  $\cos \frac{m\pi}{a} x$  і  $\sin \frac{n\pi}{b} y$  за  $m, n = 1, 2$  (рис. 19.8).

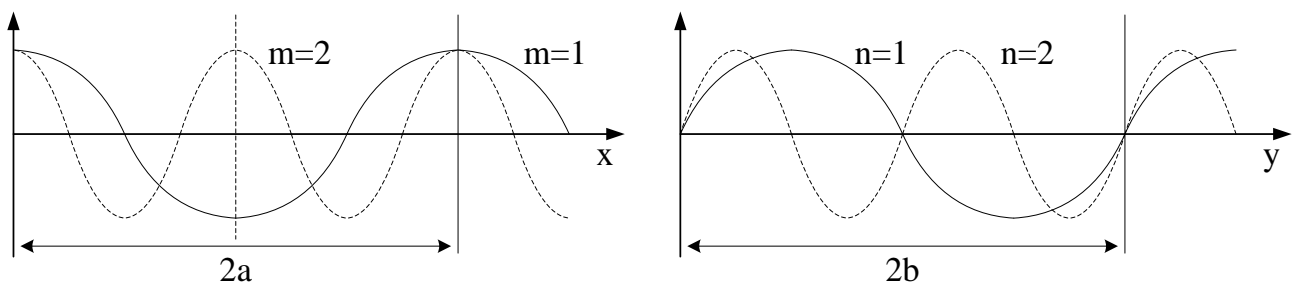


Рис. 19.8. Графіки функцій  $\cos \frac{m\pi}{a} x$  при  $\sin \frac{n\pi}{b} y$ ,  $m = 1, 2$ ,  $n = 1, 2$

Формули (19.33)–(19.36) та графіки, показані на рис. 19.8, показують, що при  $m = n = 1$  уздовж стінок хвилеводів укладаються дві стоячі напівхвилі. При  $m = n = 2$  уздовж стінок укладаються стоячі хвилі з періодом. Далі видно, що хвилі з індексами  $m = n = 0$  рівні нулю, тобто таких хвиль у хвилеводі існувати не може. Існувати у хвилеводі можуть лише хвилі, що відповідають індексам  $m \neq 0, n \neq 0$  або  $m = 0, n \neq 0$ ,

$m \neq 0, n = 0$ . Позначають такі хвилі символами  $H_{mn}, H_{0n}, H_{m0}$  (або  $TM_{mn}, TM_{0n}, TM_{m0}$ ). Очевидно, що якщо  $\beta_g = jk_g$  є уявною величиною, такі хвилі будуть поширюватися у хвилеводі. Якщо ж  $k_g$  – дійсна величина, то такі хвилі швидко загасають і поширюватися у хвилеводі не можуть.

Критичне значення частоти, у якому  $\beta_g$  перетворюється з уявного значення на комплексне, визначається формулою (19.31), тобто

$$k_g = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = 0, \quad (19.37)$$

або

$$\omega_{кр}^2 = \frac{1}{\varepsilon_a \mu_a} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right],$$

$$f_{кр} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (19.38)$$

При  $f > f_{кр}$  величина  $k_g$  – дійсна, а  $\beta_g = jk_g$  – уявна. Тобто у хвилеводі можуть поширюватися хвилі лише з частотами, що перевищують критичне значення частоти (19.38).

Критична довжина хвилі

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}{f_{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (19.39)$$

Критична частота (довжина хвилі) тим вища (менша), чим менше розміри хвилеводу  $a$  і  $b$ .

Фазова швидкість у хвилеводі розраховується за відомою формулою

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k_g} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a}}} = \frac{v_{\phi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}},$$

де

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \frac{2\pi}{\omega} v_\phi, \quad v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}},$$

а

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{(2\pi)^2} = \left( \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}{4} \right)^2 = \left( \frac{1}{\lambda_{кр}} \right)^2.$$

Групову швидкість знаходимо за формулою

$$v_{grp} = \frac{d\omega}{dk_\varepsilon}.$$

Диференціюючи (19.37) за параметром  $\omega$  і враховуючи, що  $\frac{dk_\varepsilon}{d\omega} = \frac{1}{v_{gp}}$

відповідно до правила диференціювання зворотної функції, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk_\varepsilon} &= \left( \frac{dk_\varepsilon}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2\sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_a - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \cdot 2\omega\varepsilon_a\mu_a \right)^{-1} = \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon_a\mu_a - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{\omega} v_\phi^2 = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}{v_\phi} v_\phi^2 = v_\phi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$v_{grp} = \frac{d\omega}{dk_\varepsilon} = v_\phi \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (19.40)$$

Довжина хвилі у хвилеводі

$$\Lambda_\varepsilon = \frac{v_{gp}}{f} = \frac{v_\phi}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (19.41)$$

Видно, що довжина хвилі у хвилеводі більша за довжину хвилі  $\lambda$  у вільному просторі з параметрами  $\varepsilon_a\mu_a$ .

## Контрольні запитання

1. Які типи електромагнітних хвиль поширюються у напрямних середовищах і в чому полягає їх відмінність?
2. У чому полягає фізичний сенс фазової та групової швидкостей?
3. Наведіть вирази для критичних значень частоти та довжини хвилі електромагнітних коливань, що можуть поширюватись у хвилеводі.

**Лекція 20**  
**СТРУКТУРИ ПОЛІВ У ПРЯМОКУТНИХ ХВИЛЕВОДАХ**  
**ТА МЕТОДИКА ЇХ ПОБУДОВИ**

Визначаючи з формули (19.30) похідні  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial H_z}{\partial y}$  і підставляючи їх у формули для полів Н-хвиль (19.18), отримуємо такі значення поперечних компонент полів  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  (з точністю до множника  $e^{j\omega t}$ ):

$$\dot{E}_x = j\dot{H}_{z0} \frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_0 z}, \quad (20.1)$$

$$\dot{E}_y = -j\dot{H}_{z0} \frac{\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_0 z}, \quad (20.2)$$

$$E_z = 0,$$

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{z0} \frac{jk_0}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_0 z}, \quad (20.3)$$

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{z0} \frac{jk_0}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_0 z}, \quad (20.4)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jk_0 z} \quad (20.5)$$

$$\dot{H}_{z0} = \dot{H}_{z\max} e^{j\varphi},$$

де  $\varphi$  – початкова фаза.

Якщо у (19.16) покласти, що  $H_z \neq 0$ , а  $E_z = 0$ , то маємо хвилю типу «Н» (Н-хвилю) з такими значеннями напруженості  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{j\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{E}_y &= \frac{j\omega\mu_a}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \\ \dot{H}_x &= -\frac{k_0}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & \dot{H}_y &= -\frac{k_0}{k_c^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (20.6)$$

Запишемо вирази для полів (20.1)–(20.5) у дійсній формі. При цьому враховуємо, що множення на  $j$  та на  $-j$  еквівалентно зсуву фази коливання  $e^{j(\omega t - \beta z + \varphi)}$  на  $\frac{\pi}{2}$  та на  $-\frac{\pi}{2}$  відповідно. Дійсно

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j,$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j.$$

Домноживши вирази (20.1)–(20.5) на раніше скорочений множник  $e^{j\omega t}$  і виділивши з цих виразів їх дійсні частини, знаходимо

$$E_x = E_{x\max} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \cos\left(\omega t - k_g z + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E_y = E_{y\max} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \cos\left(\omega t - k_g z + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E_z = 0,$$

$$H_x = H_{x\max} \sin\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \cos\left(\omega t - k_g z + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H_y = H_{y\max} \cos\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y \cos\left(\omega t - k_g z + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (20.7)$$

$$H_z = H_{z\max} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y \cos(\omega t - k_g z + \varphi),$$

$$E_{x\max} = \frac{\omega\mu_a n\pi}{k_c^2 b} H_{z\max}, \quad E_{y\max} = \frac{\omega\mu_a m\pi}{k_c^2 a} H_{z\max},$$

$$H_{x\max} = \frac{\beta m\pi}{k_c^2 a} H_{z\max}, \quad H_{y\max} = \frac{\beta n\pi}{k_c^2 b} H_{z\max}.$$

Видно, що поперечні складові знаходяться у фазі, а поздовжня складова  $H_z$  по відношенню до поперечних зрушена на  $\frac{\pi}{2}$ . Функції  $\cos(\omega t - k_g z)$  при дійсному значенні  $k_g$  свідчать про наявність біжучих хвиль. По осях  $x$  та  $y$  існують стоячі хвилі.

Поперечні компоненти поля  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  дадуть значення вектора Умова – Пойнтінга  $\vec{P}_z = \vec{E} \times \vec{E}$ , спрямованого вздовж хвилеводу, тобто вздовж осі  $z$ .

Ці компоненти знаходяться у фазі і при перемноженні будуть завжди мати позитивні значення та один напрямок поширення (рис. 20.1).

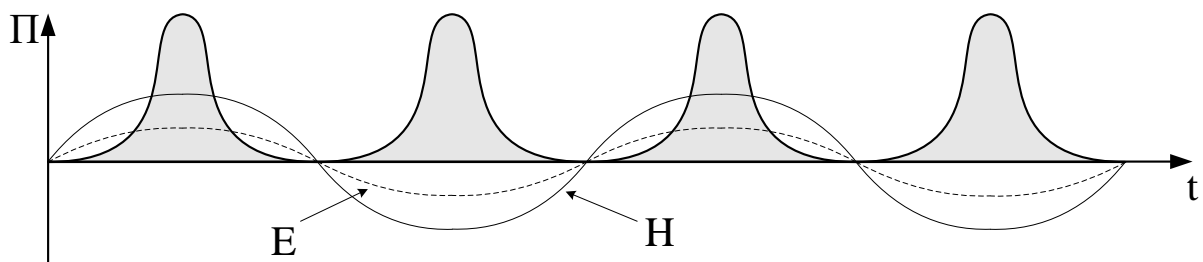


Рис. 20.1. Вектор Умова – Пойнтінга для поперечних компонентів  $E$  і  $H$

Поперечні значення полів  $E_x$  і  $E_y$  поздовжньої  $H_z$  зсунуті по фазі на  $\frac{\pi}{2}$ . Вектор Умова – Пойнтінга, утворений цими компонентами, буде знакозмінним, що свідчить про коливання енергії поля у напрямку при поширенні від однієї стінки хвилеводу до іншої (рис. 20.2).

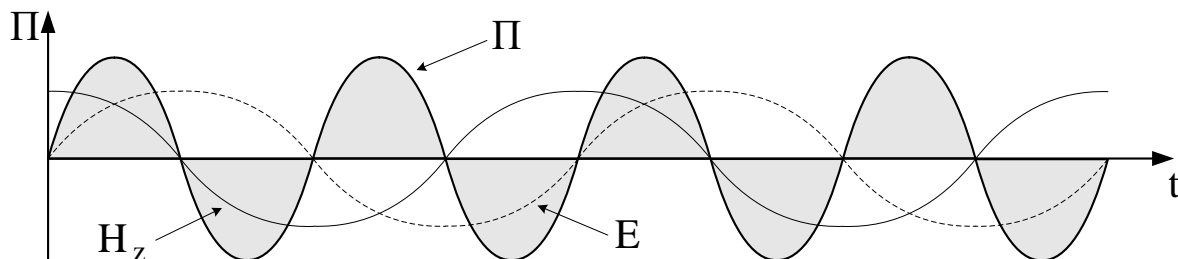


Рис. 20.2. Вектор Умова – Пойнтінга для поперечних компонент  $E_x$ ,  $E_y$  і поздовжньої  $H_z$  компонент поля

Наявність поздовжньої компоненти вектора Умова – Пойнтінга і компоненти, що коливається між стінками хвилеводу, дає підставу вважати, що енергія переноситься вздовж хвилеводу послідовно, відбиваючись від його стінок (рис. 20.3).

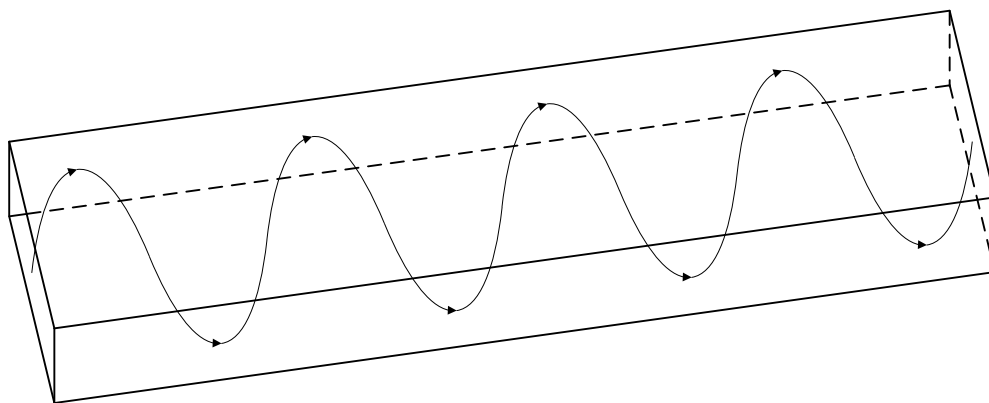


Рис. 20.3. Поширення енергії поля у хвилеводі

У хвилеводі може існувати безліч полів з різними значеннями індексів.

Розглянемо найпростішу і найчастіше використовувану хвилю  $H_{10}$  ( $TE_{10}$ ) з індексами  $m = 1, n = 0$ . У цьому випадку

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= 0, \dot{H}_x = 0, \\ \dot{E}_y &= -j\dot{E}_{y0} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jk_g z}, \dot{E}_{y0} = E_{y\max} e^{j\varphi}, \\ \dot{H}_x &= j\dot{H}_{x0} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jk_g z}, \dot{H}_{x0} = H_{x\max} e^{j\varphi}, \\ \dot{H}_z &= \dot{H}_{z0} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jk_g z}, \dot{H}_{z0} = H_{z\max}.\end{aligned}\quad (20.8)$$

З урахуванням множника  $e^{j\omega t}$  дійсні значення полів відповідно набудуть вигляду

$$\begin{aligned}E_y &= E_{y\max} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \left( \omega t - k_g z + \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \\ H_x &= H_{x\max} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \left( \omega t - k_g z + \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \\ H_z &= H_{z\max} \cos \frac{\pi}{a} x \cos (\omega t - k_g z + \varphi),\end{aligned}\quad (20.9)$$

або

$$\begin{aligned}E_y &= E_{y\max} \sin \frac{\pi}{a} x \sin (\omega t - k_g z + \varphi), \\ H_x &= -H_{x\max} \sin \frac{\pi}{a} x \sin (\omega t - k_g z + \varphi).\end{aligned}\quad (20.10)$$

Побудову структури (картини) розподілу полів доцільно розпочинати з побудови зображення розподілу силових ліній електричного поля. Поля доцільно розглядати в перерізах  $t = \text{const}$ ,  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ . Значення початкової фази  $\varphi$  прийемо рівним нулю, тобто  $\varphi = 0$ .

$$\text{При } t = 0 \quad \varphi = 0 \quad \text{і} \quad k_g z = \frac{\pi}{2}, \quad \left( z = \frac{\pi}{2k_g} = \frac{\pi}{2} \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{4} \right).$$



Картину силових ліній полів та їх миттєвих значень  $E_y = -E_{y\max} \sin \frac{\pi}{a} x$ ,

$H_x = H_{x\max} \sin \frac{\pi}{a} x$ ,  $H_z = H_{z\max} \cos \frac{\pi}{a} x$  показано на рис. 20.4.

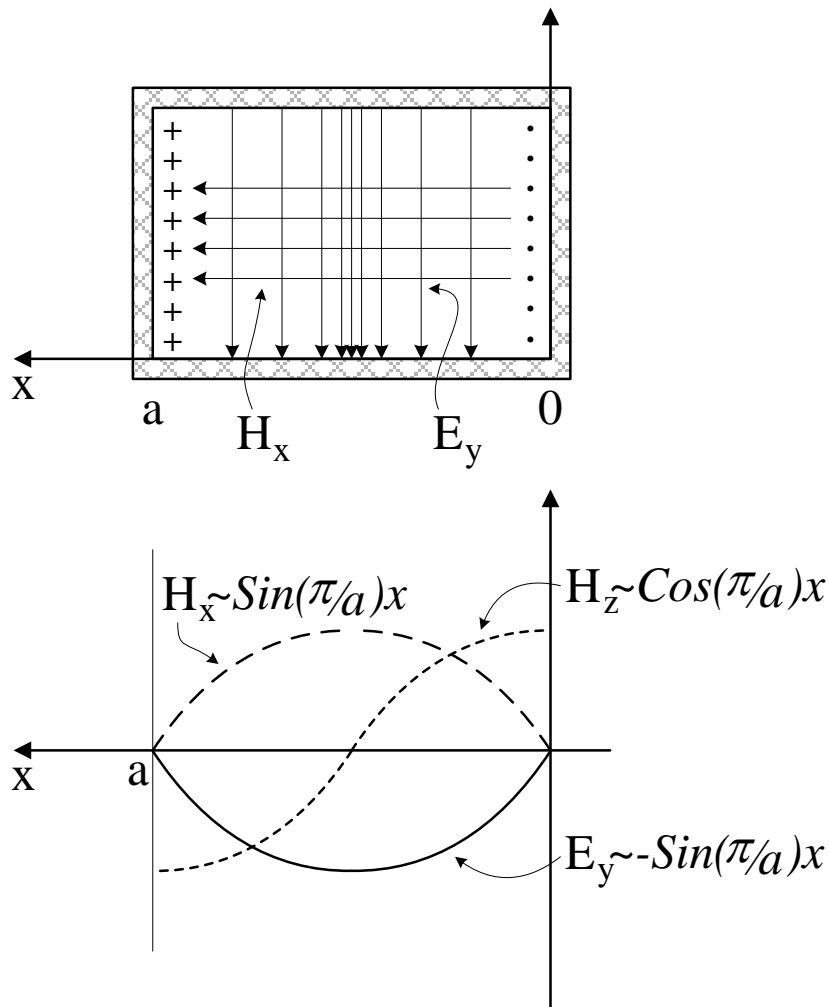


Рис. 20.4. Картина силових ліній полів

Розглянемо тепер переріз  $x = x_0 = \text{const} < \frac{\pi}{2}$  при  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$  (рис. 20.5).

При цьому

$$E_y = -\alpha E_{y\max} \sin k_g z,$$

$$H_x = \alpha H_{x\max} \sin k_g z, \quad (20.11)$$

$$H_z = \gamma H_{z\max} \cos k_g z.$$

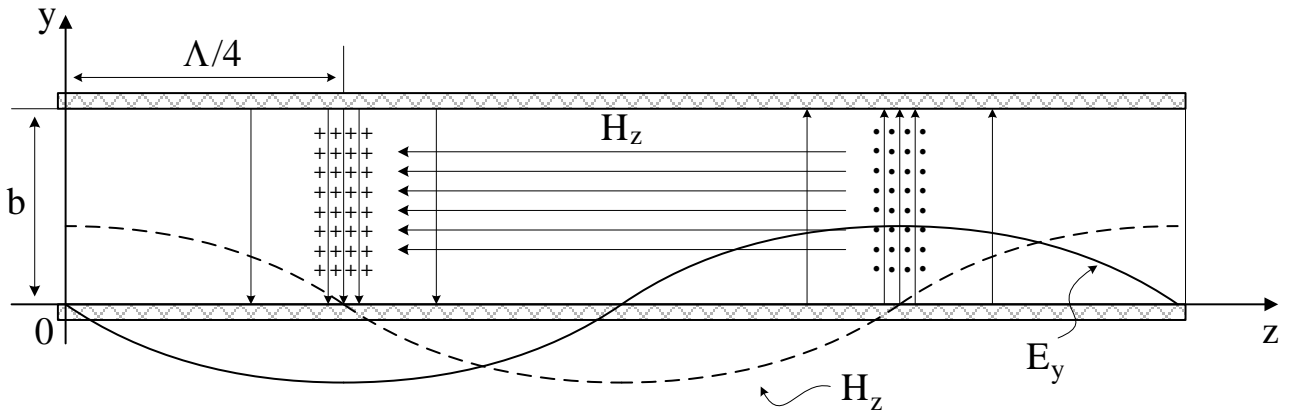


Рис. 20.5. Поля у перерізі  $x = const < \frac{\pi}{2}$

На рис. 20.5 вісь  $x$  спрямована перпендикулярно до сторінки від читача.

Хрестиками позначені силові лінії поля.  $H_x$  спрямовані від читача, крапками – до читача. Силові лінії  $H_x$  та  $H_z$  спільно замкнуті. Поля  $H_x$  та  $E_y$  протифазні (зсунуті на  $180^\circ$  один щодо одного). Стосовно поля  $H_z$  вони зрушені на  $90^\circ$ .

Розглянемо тепер переріз  $y = const$ . Від  $y$  у ці поля не залежать, тобто однакові у будь-якому перерізі (рис. 20.6).

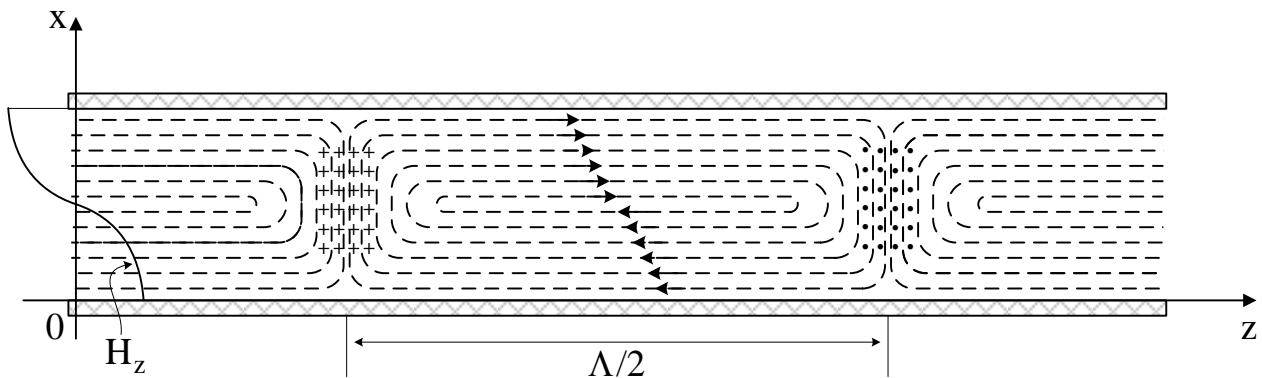


Рис. 20.6. Поля у перерізі  $y = const$

Тут хрестиками та точками позначено сліди електричного поля  $E_y$ .

Критична частота для хвилі  $H_{10}$

$$f_{кр} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{v}{2a}. \quad (20.12)$$

Критична довжина хвилі

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{v}{\frac{v}{2a}} = 2a, \quad a = \frac{\lambda_{кр}}{2}. \quad (20.13)$$

Ця довжина хвилі не залежить від величини розміру  $b$ .

*Рекомендації щодо вибору розмірів поперечного перерізу хвилеводу*

1. Розмір  $a$  необхідно вибирати з умови  $\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$ . Зазвичай  $a = 0,7\lambda$ .

В іншому випадку може виникнути хвиля  $H_{20}$ .

2. Розмір  $b$  необхідно вибирати з умови  $b < \frac{\lambda}{2}$ . Інакше може виникнути хвиля  $H_{10}$ .

3. Мінімальний розмір  $b$  обмежується пробивною напругою та розраховується за формулою

$$b = \frac{480P}{\sqrt{\varepsilon_r} a E_{дон}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, \quad (20.14)$$

де  $P$  [кВт] – середня потужність хвилі у хвилеводі;  $\varepsilon_r$  – відносна діелектрична проникність;  $E_{дон}$  – допустима пробивна напруга середовища, що заповнює хвилевід.

### Контрольні запитання

1. Наведіть вирази для складових електромагнітного поля при поширенні в них хвилі  $H_{10}$ .

2. Від яких лінійних розмірів хвилеводу залежить критична частота для поширення в ньому хвилі  $H_{10}$ ?

3. Перелічіть рекомендації, яких слід дотримуватись під час вибору розмірів поперечного перерізу хвилеводу.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Андрущак, А. С. Прикладна електродинаміка інформаційних систем / А. С. Андрущак, З. Ю. Готра, О. С. Кушнір. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2012. – 304 с.

Захарія, Й. А. Методи прикладної електродинаміки / Й. А. Захарія. – Львів : Бескид Біт, 2003. – 352 с.

Іванов, В. О. Технічна електродинаміка. Антени та поширення радіохвиль : консп. лекцій / В. О. Іванов, Є. І. Габрусенко. – Київ : Нац. авіац. ун-т, 2006. – 70 с.

Купрій, О. М. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Методичні вказівки та завдання розрахунково-графічної роботи : навч. посіб. для студ. спец. 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / О. М. Купрій, В. І. Найдено. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 25 с.

Логачова, Л. М. Поширення земних радіохвиль та мобільний зв'язок : навч. посіб. / Л. М. Логачова, Т. І. Бугрова. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2019. – 236 с.

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Електродинаміка та поширення радіохвиль» / уклад. В. С. Вунтесмері, О. М. Купрій, А. Ф. Левіна. – 2-ге вид., випр. та доп. – Київ, 2011. – 68 с.

Пілінський, В. В. Технічна електродинаміка : консп. лекцій / В. В. Пілінський, П. В. Попович. – Київ : Нац. техн. ун-т України «КПІ», 2006. – 224 с.

Пільтяй, С. І. Електродинаміка та поширення радіохвиль. Практикум : навч. посіб. для студ. спец. 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / С. І. Пільтяй. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 54 с.

Сугаков, В. Й. Теоретична фізика. Електродинаміка : навч. посіб. / В. Й. Сугаков. – Київ : Вища шк., 1974. – 271 с.

Шокало, В. М. Електродинаміка та поширення радіохвиль : підруч. для студ. ВНЗ. В 2 ч. Ч. 1. Основи теорії електромагнітного поля / В. М. Шокало, В. І. Правда. – Харків : ХНУРЕ ; Колегіум, 2009. – 286 с.

Шокало, В. М. Електродинаміка та поширення радіохвиль : підруч. для студ. ВНЗ. В 2 ч. Ч. 2. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль / В. М. Шокало, В. І. Правда. – Харків : ХНУРЕ ; Колегіум, 2010. – 435 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
Лекція 1. ЗАКОНИ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ..	6
1.1. Закон Кулона .....	6
1.2. Напруженість електростатичного поля .....	7
1.3. Силкові лінії електростатичного поля .....	7
1.4. Вектор електростатичної індукції.....	8
1.5. Принцип суперпозиції полів .....	9
Контрольні запитання.....	9
Лекція 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ.....	10
2.1. Концепція вектора потоку. Рівність Гаусса – Остроградського.....	10
2.2. Дивергенція вектора індукції поля .....	11
2.3. Теорема Гаусса – Остроградського .....	14
Контрольні запитання.....	14
Лекція 3. РОБОТА ТА ПОТЕНЦІАЛ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ.....	15
3.1. Робота електричного поля заряду.....	15
3.2. Визначення потенціалу .....	16
3.3. Градієнт скалярного поля потенціалу .....	18
Контрольні запитання.....	21
Лекція 4. КРИВОЛІНІЙНІ СИСТЕМИ КООРДИНАТ.....	22
4.1. Узагальнена система криволінійних координат .....	22
4.2. Приріст змінних у різних системах координат.....	24
4.3. Дивергенція, градієнт, рівняння Лапласа та Пуассона, ротор в ортогональних криволінійних системах координат.....	26
Контрольні запитання.....	28
Лекція 5. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМ ПОНЯТТЯ.....	29
5.1. Математичний опис законів електричного струму.....	29
5.2. Закон Ома .....	31
5.3. Сторонні сили та їх напруженість. Електрорушійна сила.....	32

5.4. Вирази для роботи та потужності струму в диференціальній та інтегральній формах .....	33
5.5. Змінний струм у колі. Струм зміщення .....	34
Контрольні запитання.....	35
Лекція 6. ТЕОРІЯ ПОСТІЙНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ.....	36
6.1. Вектор магнітної індукції.....	36
6.2. Закон Біо – Савара .....	36
6.3. Циркуляція магнітного поля .....	38
Контрольні запитання.....	41
Лекція 7. ПОНЯТТЯ РОТОРА ТА ТЕОРЕМА СТОКСА .....	42
7.1. Визначення поняття векторного ротора .....	42
7.2. Теорема Стокса .....	45
7.3. Зв'язок магнітного поля та струму в диференціальній формі .....	46
Контрольні запитання.....	47
Лекція 8. ВЕКТОРНИЙ ОПЕРАТОР НАБЛА .....	48
8.1. Загальне визначення оператора $\nabla$ (набла) .....	48
8.2. Градієнт.....	48
8.3. Дивергенція.....	49
8.4. Ротор.....	49
Контрольні запитання.....	51
Лекція 9. ТЕОРІЯ ПОСТІЙНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	52
9.1. Рівняння Максвелла для електростатичних і магнітостатичних полів .....	52
Контрольні запитання.....	56
Лекція 10. ТЕОРІЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	57
10.1. Перше рівняння Максвелла .....	57
10.2. Друге рівняння Максвелла .....	59
10.3. Повні системи рівнянь Максвелла у диференціальній та інтегральній формах .....	60
Контрольні запитання.....	62
Лекція 11. ЕНЕРГІЯ ЗМІННОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	63
11.1. Вектор Умова – Пойнтінга .....	63
Контрольні запитання.....	69

Лекція 12. КОМПЛЕКСНА ФОРМА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ТА ТЕОРЕМИ УМОВА – ПОЙНТИНГА.....	70
12.1. Використання символічного методу в теорії змінного електромагнітного поля .....	70
Контрольні запитання.....	74
Лекція 13. ПЛОСКІ ХВИЛІ ТА ТЕОРІЯ ЇХ ПОШИРЕННЯ .....	75
Контрольні запитання.....	83
Лекція 14. ТЕОРІЯ ПОШИРЕННЯ РАДІОХВИЛЬ .....	84
14.1. Електрофізичні характеристики середовищ поширення радіохвиль. 84	
14.2. Особливості поширення плоских хвиль у середовищі з комплексною діелектричною проникністю .....	87
Контрольні запитання.....	93
Лекція 15. ГРАНИЧНІ УМОВИ ДЛЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ТА МАГНІТНОЇ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ.....	94
Контрольні запитання.....	98
Лекція 16. ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ЗАЛОМЛЕННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ НА ПЛОСКІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ .....	99
Контрольні запитання.....	105
Лекція 17. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ РАДІОХВИЛЬ .....	106
17.1. Хвильові рівняння та запізнювальні потенціали .....	106
Контрольні запитання.....	115
Лекція 18. НАЙПРОСТІШІ ВИПРОМІНЮВАЧІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ .....	116
18.1. Диполь Герца.....	116
18.2. Зони електромагнітного поля, що створюється у просторі навколо вібратора Герца .....	120
18.3. Потужність випромінювання диполя.....	121
18.4. Опір випромінювання .....	123
18.5. Діаграма спрямованості диполя .....	123
Контрольні запитання.....	125
Лекція 19. ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НВЧ-ДІАПАЗОНУ .....	126
19.1. Основні типи електромагнітних хвиль у напрямних середовищах ..	126

19.2. Прямокутний хвилевід.....	131
Контрольні запитання.....	139
Лекція 20. СТРУКТУРИ ПОЛІВ У ПРЯМОКУТНИХ ХВИЛЕВОДАХ ТА МЕТОДИКА ЇХ ПОБУДОВИ .....	140
Контрольні запитання.....	146
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	147



Навчальне видання

**Волосюк Валерій Костянтинович  
Жила Семен Сергійович  
Яковлев Віталій Георгійович**

## **ЕЛЕКТРОДИНАМІКА ТА ПРИСТРОЇ МІКРОХВИЛЬОВОГО ДІАПАЗОНУ**

Редактор Н. В. Мазепа

Зв. план, 2023

Підписано до видання 14.03.2024

Ум. друк. арк. 8,4. Обл.-вид. арк. 9,5 . Електронний ресурс

---

Видавець і виготовлювач  
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)  
Видавничий центр «ХАІ»  
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17  
[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів  
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001