Робочий зошит
з лінійної алгебри
та аналітичної геометрії

2004

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

РОБОЧИЙ ЗОШИТ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

____
прізвище

____
ім'я та по батькові

____
назва навчального підрозділу (курс, факультет, група)

____
навчальний рік, семестр

Харків "ХАІ" 2004

Затверджено методичною комісією факультету N4
від 29.09.2000р. (протокол N 1)

Укладачі:

І. В. Брисіна,
О. В. Головченко,
В. Ф. Деменко,
Ю. О. Крашаниця,
О. Г. Ніколаєв,
В. С. Проценко,
В. О. Рвачов,
В. Т. Сікульський,
Є. П. Томілова,
О. Г. Ушакова,
В. В. Хоменко

Передмова

Даний робочий зошит призначено для студентів університету з метою краще зрозуміти та засвоїти розділ "Лінійна алгебра та аналітична геометрія". Ця частина вищої математики має численні застосування у різних дисциплінах, які вивчаються майбутнім інженером.

Програма курсу лінійної алгебри для різних спеціальностей має свої відмінності, тому автори прагнуть охопити її у максимально повному для університету обсязі.

Матеріал поділено на 17 занять, які відповідають одному навчальному семестру.

При користуванні зошитом рекомендується перед кожним заняттям ознайомитись з теоретичним матеріалом відповідної лекції або підручника [1,4].

На основі досвіду проведення практичних занять в університеті автори склали набори задач за темами, прагнучи, щоб складніші задачі йшли за простішими.

Викладач вибирає за власним розсудом задачі для аудиторного заняття та для домашнього завдання відповідно до навчальної програми конкретної спеціальності та рівня підготовки студентів. Для глибшого вивчення предмета викладач може порекомендувати додатково розв'язати важкі задачі із зошита або численних задачників [1,3]. Доцільно також використовувати такі навчальні посібники, в яких наведено докладне розв'язання типових прикладів [5].

Більшість задач у зошиті мають відповіді, якщо ж відповіді немає, то це означає, що вона надто очевидна.

У зошиті залишено місце для розв'язання задач, але найскладніші з них все ж краще спочатку розв'язати на чорновику.

У зашиті наведено 30 варіантів завдань з двох тем. Завдання містять приклади різного рівня складності, які за розсудом викладача можуть бути використані як для самостійної роботи студентів, так і для контролю поточної успішності.

Заняття 1
Визначники. Правило Крамера

1.1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.

1.2. Заняття.

Знайти визначники:

1.2.1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.2.2. $\begin{vmatrix} cos\gamma & -sin\gamma \\ sin\gamma & cos\gamma \end{vmatrix}$.

1.2.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 0.

1.2.4. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 88.

1.2.5. Розкласти визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.2.6. Довести тотожність:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

1.2.7. Розв'язати рівняння, користуючись властивостями визначників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$$

1.2.8. Обчислити визначник за методом лінійних перетворень:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: -4.

1.2.9. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \\ 7 & 8 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 3.

1.2.10(додаткова). Знайти визначники матриць розміром $n \times n$, елементи яких утворені за правилами: а) $a_{ij} = min(i,j)$; б) $a_{ij} = max(i,j)$.

Відповідь: а) 1; б) $n(-1)^{n-1}$.

1.2.11. Довести, що система рівнянь має лише один розв'язок:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 2x + 3y - 5z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язати системи лінійних рівнянь за допомогою правила Крамера:

1.2.12. $\begin{cases} 3x + 5y = -3, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$

1.2.13. $\begin{cases} ax + by = ad, \\ bx + cy = bd. \end{cases}$

Відповідь: $x = d,\ y = 0$, якщо $ac - b^2 \neq 0$. У випадку $ac - b^2 = 0$ система має нескінченну кількість ров'язків.

1.2.14. $\begin{cases} -3x + y - z = -3, \\ x + y + z = 3, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

Відповідь: $x = y = z = 1$.

1.2.15. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ x + 2y + 2z = 3, \\ 3x + 7y + 4z = 3. \end{cases}$

Відповідь: $x = 3,\ y = -2,\ z = 2.$

1.2.16(додаткова). $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = 1, \\ x + y + \lambda z = 1. \end{cases}$

Відповідь: якщо $\lambda = -2$, система несумісна. Якщо $\lambda = 1$, система має безліч розв'язків. Якщо $\lambda \neq 1,\ \lambda \neq -2$, то $x = y = z = \frac{1}{\lambda+2}$.

1.3. Завдання.

Обчислити визначники:

1.3.1. $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}.$ 1.3.2. $\begin{vmatrix} 1 & log_b a \\ log_a b & 1 \end{vmatrix}.$

1.3.3. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

Відповідь: 27.

1.3.4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.$

Відповідь: ab.

1.3.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}.$

Відповідь: 70.

1.3.6. Розкласти визначник за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 3 \\ 2 & b & 0 \\ 0 & c & 2 \end{vmatrix}.$$

1.3.7. Розв'язати рівняння, користуючись властивостями визначників:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.8. Знайти визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповідь: 7.

1.3.9. Знайти визначник $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Відповідь: -58.

Додаткові завдання.

1.3.10. Довести, що визначник порядку n дорівнює 0:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}.$$

1.3.11. Довести, що $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

1.3.12. Довести, що визначники Δ_n утворюють ряд Фібоначчі:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язати системи рівнянь за допомогою правила Крамера:

1.3.15. $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta. \end{cases}$

1.3.16. $\begin{cases} 2x + 5y + 7z = 0, \\ 3x + 2y - z = 0, \\ 5x + 7y + 7z = 0. \end{cases}$

1.3.17. $\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

Відповідь: $x = -84; y = -46,5; z = 15,5.$

1.3.18. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

Відповідь: $x = -1;\ y = 0;\ z = 1.$

1.3.19 Довести, що система $\begin{cases} x - y - z = 1, \\ 2x - 2y - 2z = 2, \\ 3x - 3y - 3z = 1 \end{cases}$ несумісна.

Зауваження. Зверніть увагу на те, що $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, тобто випадок системи розміром 3×3 відрізняється від випадку системи 2×2, для якої $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ означає, що вона має безліч розв'язків.

Заняття 2
Метод елементарних перетворень (метод Гаусса-Жордана) розв'язування систем лінійних рівнянь. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність

2.1. Нагадаємо, що елементарними перетвореннями рядків матриці називаються:

а) перестановка яких-небудь рядків;

б) множення довільного рядка на число $k \neq 0$;

в) додавання до рядка іншого рядка, помноженого на число.

Виконуючи елементарні перетворення над розширеною матрицею системи, можна або знайти усі розв'язки, або довести несумісність системи.

Для повторення теми "Лінійні операції над векторами" можна використати підрозд. 7.1 та 7.2 "Сборника конкурсных задач для поступающих в ХАИ".

2.2. Заняття.

Розв'язати системи методом елементарних перетворень:

2.2.1. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 3x + 2y - 3z = 2, \\ 5x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$

Відповідь: $x = y = z = 1$.

2.2.2. $\begin{cases} -x + 3y + 4z = 7, \\ 2x + y + 3z = 8, \\ -5x + 7y - z = -7. \end{cases}$

Відповідь: $x = 1,\ y = 0,\ z = 2.$

2.2.3. $$\begin{cases} x + y - z + t = 1, \\ -2x - y + 3z - 2t = 2, \\ 2y + 4z - 7t = 2 \\ x + 3y + 3z - 6t = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x = -9,\ y = 7,\ z = -3,\ t = 0.$

Довести, що системи несумісні:

2.2.4. $$\begin{cases} x + 3y + 4z = -1, \\ 2x + 2y - z = 5, \\ -x + 5y + 14z = 0. \end{cases}$$

2.2.5. $\begin{cases} x+y-z+2t=0, \\ -3x-y+2z-5t=1, \\ x+4y-3z+2t=0, \\ -x+4y-2z-t=0. \end{cases}$

2.2.6. Порівняти розв'язування систем за формулами Крамера і за методом елементарних перетворень. Які переваги та недоліки, на Ваш погляд, мають методи?

2.2.7. Нехай $ABCD$ – паралелограм, $AD \parallel BC$, K – середина BC, L – середина DC. Розкласти вектори $\overrightarrow{BD}$ та $\overrightarrow{AC}$ за базисом $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AL}$.

Відповідь: $\overrightarrow{BD} = 2(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$, $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

2.2.8. У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за базисом, утвореним $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB} \cdot \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|} + \overrightarrow{AC} \cdot \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}$.

2.2.9. Нехай $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $|\overrightarrow{AD}| = 4|\overrightarrow{BC}|$. Знайти розкладення векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$ та $\overrightarrow{AM}$ за базисом $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$, якщо M – точка перетину діагоналей, S – точка перетину бічних сторін.

Відповідь: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \dfrac{\overrightarrow{b}}{4}$, $\overrightarrow{AS} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{b}}{5} + \dfrac{4\overrightarrow{a}}{5}$.

2.2.10. Довести, що вектори $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ утворюють лінійно незалежну систему. Як можна відповісти на запитання, користуючись правилом Крамера?

2.2.11. Розкласти $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{m} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 10\overrightarrow{k}$ за базисом $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ попереднього завдання 2.2.10.

Відповідь: $\overrightarrow{m} = 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

2.3. Завдання.

Розв'язати за методом Гаусса-Жордана або довести несумісність:

2.3.1. $\begin{cases} x - y + 3z = 6, \\ -2x + y - z = 2, \\ 3x - y + 4z = 5. \end{cases}$

Відповідь: $x = -2,\ y = 1,\ z = 3.$

2.3.2. $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 3, \\ -x + y + 3z = 1, \\ -x + 7y + 7z = 0. \end{cases}$

Відповідь: система несумісна.

2.3.3. $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y + t = 1, \\ -x + z + t = 1, \\ y + z - t = 1. \end{cases}$

Відповідь: $x = y = z = t = 1.$

2.3.4. $\begin{cases} -x + 2y - z + t = -4, \\ 2x - y - z + 3t = -1, \\ 3x + y + z = 6, \\ 5x - z + t = 2. \end{cases}$

Відповідь: $x = 1,\ y = 0,\ z = 3,\ t = 0.$

2.3.5. $\begin{cases} -x + 2y - z + t = -4, \\ 2x - y - z + 3t = -1, \\ x + y + z - t = 0, \\ 2x + 2y - z + 3t = 7. \end{cases}$

Відповідь: система несумісна.

2.3.6. Нехай $ABCDEF$ – правильний шестикутник, M – середина DE, N – середина AM, P – середина BC. Розкласти вектор $\overrightarrow{NP}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AF}$.

Відповідь: $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

2.3.7. Довести, що вектори $\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}, 9\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ некомпланарні.

2.3.8. Нехай $ABCD$ – трапеція, $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$. Довести, що вектор $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ колінеарний до $\overrightarrow{AD}$. Знайти α; $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{AD}$.

Відповідь: $\alpha = 1 + \lambda$.

Заняття 3
Скалярний добуток векторів

3.1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.

Скалярним добутком векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ називається число

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| cos(\overrightarrow{a} \,^\wedge \overrightarrow{b}).$$

Позначається скалярний добуток $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, або $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, або $< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} >$.
Властивості скалярного добутку:

1) $(\alpha \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \alpha(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$;

2) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$;

3) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2$;

4) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$.
Якщо у просторі задано прямокутну декартову систему координат, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, де a_x, a_y, a_z – координати вектора $\overrightarrow{a}$, а b_x, b_y, b_z – координати вектора $\overrightarrow{b}$ у цій системі координат.

3.2. Заняття.

3.2.1. Кут між векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$; $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$; $|\overrightarrow{b}| = 1$. Знайти $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$, якщо $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

3.2.2. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, якщо $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = \frac{\pi}{3}$; $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $|\overrightarrow{c}| = 6$.

Відповідь: $|\overrightarrow{p}| = 10$.

3.2.3. Визначити кут між векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, якщо $\overrightarrow{a} = (7; 1; 1)$; $\overrightarrow{b} = (6; 2; 2)$.

Відповідь: $cos(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \frac{23}{\sqrt{51}\sqrt{11}}$.

3.2.4. Обчислити $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{b}| = 4$; $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = 135^o$.

Відповідь: 40.

3.2.5. Знайти кути трикутника $A(1;2;1)$; $B(3;-1;7)$; $C(7;4;-2)$. Перевірити, що трикутник рівнобічний.

3.2.6. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{c}}(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})$, якщо $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}$; $\overrightarrow{c}=4\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$.

Відповідь: -9.

3.2.7. Визначити, при якому значенні α вектори $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\alpha\overrightarrow{k}$ перпендикулярні.

Відповідь: -6.

3.2.8. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AD}$ – бісектриса кута A трикутника ABC, де $A(1;0;1)$; $B(2;2;3)$; $C(5;2;5)$.

Відповідь: $\frac{17}{\sqrt{34}}$**.**

3.2.9. Відомо, що $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$, **де** $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-6\overrightarrow{k}$**. Знайти довжину вектора** $\overrightarrow{b}$**.**

Відповідь: 7.

3.2.10. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} (\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}) \\ (\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{c},\overrightarrow{b}) & (\overrightarrow{c},\overrightarrow{c}) \end{vmatrix}$**, якщо** $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$**.**

Відповідь: 4.

3.2.11. Знайти $|cos\alpha|$**, де** α **– кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах** $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$**.**

Відповідь: $\frac{2}{5\sqrt{7}}$.

3.2.12. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{BC}$, **якщо** $\overrightarrow{AM}$ – **медіана трикутника** ABC, **де** $A(1;2;3)$; $B(-1;2;4)$; $C(1;4;2)$.

Відповідь: 0.

3.3. Завдання.

3.3.1. При якому значенні α **вектори** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ **та** $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} + \alpha\overrightarrow{n}$ **перпендикулярні, якщо відомо, що** $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 1$; $(\overrightarrow{m} \,\widehat{}\, \overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{3}$**?**

Відповідь: $\alpha = -1$.

3.3.2. Знайти $|cos\,\alpha|$, **якщо** α – **кут між бісектрисами кутів** XOY **та** XOZ.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

3.3.3. Знайти $|\overrightarrow{a}|$, **якщо** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$; $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 1$; $|\overrightarrow{p}| = 2$; $(\overrightarrow{m}\,^\wedge\,\overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{m}\,^\wedge\,\overrightarrow{p}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{n}\,^\wedge\,\overrightarrow{p}) = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\sqrt{15}$.

3.3.4. Обчислити $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$, **якщо** $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$.

Відповідь: $-\frac{3}{2}$.

3.3.5. Обчислити кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$, де $|\overrightarrow{m}| = 1$; $|\overrightarrow{n}| = 2$; $(\overrightarrow{m}\,^\wedge\,\overrightarrow{n}) = \frac{2}{3}\pi$.

Відповідь: $cos\,\alpha = \frac{-6}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{52}}$.

3.3.6. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, колінеарний вектору $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ і такий, що задовольняє умову $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} = 3$.

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j} - \frac{1}{2}\overrightarrow{k}$.

3.3.7. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} + \text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{BC}$, якщо $A(1;4;-1)$; $B(0;2;1)$; $C(3;3;3)$.

Відповідь: $\sqrt{21}$.

3.3.8. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, якщо $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$; $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$; $|\overrightarrow{m}| = 2$; $|\overrightarrow{n}| = 3$; $(\overrightarrow{m} \,\widehat{}\, \overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $-\frac{11}{\sqrt{7}}$.

3.3.9. Знайти напрямні косинуса вектора $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}$.

3.3.10. Обчислити роботу сили $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ при переміщенні матеріальної точки з положення $A(-1; 2; 0)$ у положення $B(2; 1; 3)$.

Зауваження. $A = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{S})$, де A – робота; F – сила; S – прямолінійний шлях, пройдений під дією цієї сили.

Відповідь: 4.

3.3.11. Відомо, що вектор $\overrightarrow{x}$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{b} = 18\overrightarrow{i} - 22\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$. Кут між вектором $\overrightarrow{x}$ та віссю OY – тупий. Знайти координати $\overrightarrow{x}$, якщо $|\overrightarrow{x}| = 14$.

Відповідь: $(-4; -6; 12)$.

Додаткові завдання.

3.4.1. Обчислити проекцію вектора $\overrightarrow{S} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ на вектор, напрямні косинуси якого дорівнюють один одному.

Відповідь: $\sqrt{3}$.

3.4.2. Знайти вектор $\overrightarrow{p}$, перпендикулярний до вектора $3\overrightarrow{i}+6\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{k}$ та вектора $\overrightarrow{i}$, якщо відомо, що $|\overrightarrow{p}|=1$.

Відповідь: $\left(0;\mp\frac{4}{5};\pm\frac{3}{5}\right)$.

3.4.3. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

3.4.4. Обчислити косинус тупого кута між медіанами, проведеними із вершин гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

Відповідь: $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

3.4.5. Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – некомпланарні. Знайти вектор $\overrightarrow{x}$, якщо $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}=1$; $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{x}=0$; $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{x}=0$.

Заняття 4
Векторний добуток

4.1. Векторним добутком векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називають вектор $\overrightarrow{c}$ ($\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, або $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$), який задовольняє умови:

1) $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$;

2) впорядкована трійка векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ задовольняє правило правої руки, тобто з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого видно проти годинникової стрілки;

3) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|sin(\overrightarrow{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{b})$, тобто модуль вектора $\overrightarrow{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Властивості векторного добутку:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$;

2. $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$;

3. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$;

4. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, якщо (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) – координати векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ у декартовій системі координат.

4.2. Заняття.

4.2.1. Розкрити дужки та спростити вираз
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$.

Відповідь: $2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$.

4.2.2. Знайти $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 3$; $|\overrightarrow{b}| = 26$, а $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = 72$.

Відповідь: ± 30.

4.2.3. Знайти $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 10$; $|\overrightarrow{b}| = 2$; $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 12$.

Відповідь: 16.

4.2.4. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n}$ та $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}$, якщо $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 1$, а $(\overrightarrow{m} \,\widehat{}\, \overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $\frac{5}{2}$.

4.2.5. Знайти площу трикутника та довжину висоти, проведеної з вершини B, якщо трикутник задано координатами своїх вершин $A(1; 2; 3)$; $B(-1; 3; 4)$, $C(2; 4; 5)$.

Відповідь: $S = \frac{5}{\sqrt{2}}$; $h = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

4.2.6. Знайти одиничний вектор $\overrightarrow{c}$, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, якщо $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

Відповідь: $\left(\mp\frac{10}{\sqrt{213}}; \pm\frac{8}{\sqrt{213}}; \pm\frac{7}{\sqrt{213}}\right)$.

4.2.7. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, якщо

$$\overrightarrow{a} = (3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}) \times (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}); \ \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Відповідь: $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{113}}$.

4.2.8. Обчислити проекцію вектора $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - 12\overrightarrow{q} + 4\overrightarrow{r}$ на вісь, яка має напрям вектора $(\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{r}) \times (\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q} - \overrightarrow{r})$, якщо $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ взаємно ортогональні орти.

Відповідь: $\frac{42}{\sqrt{46}}$.

4.2.9. Обчислити $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Відповідь: $\sqrt{329}$.

4.2.10. Площа паралелограма дорівнює 8. Знайти площу паралелограма, сторонами якого є вектори діагоналей цього паралелограма.

Відповідь: 16.

4.2.11. Знайти $sin\alpha$, де α – кут між вектором $\overrightarrow{AD}$ і площиною трикутника ABC, якщо $A(1;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(0;0;1)$, $D(2;3;4)$.

Відповідь: $\frac{8}{\sqrt{3}\sqrt{26}}$.

4.3. Завдання.

4.3.1. Обчислити: 1) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, **2)** $|(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})|$, **якщо** $|\overrightarrow{a}| = 2$; $|\overrightarrow{b}| = 4$; $(\overrightarrow{a} \,\widehat{}\, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $4\sqrt{3}$; $12\sqrt{3}$.

4.3.2. Знайти координати векторів $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$; $(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$, **якщо** $\overrightarrow{a} = (-3; 1; 4)$; $\overrightarrow{b} = (2; 5; 1)$.

Відповідь: $(-19; 11; -17)$; $(57; -33; 51)$.

4.3.3. Обчислити площу паралелограма $ABCD$, **якщо** $A(1; 0; -2)$; $B(-1; 1; 4)$; $C(0; -1; -3)$.

Відповідь: $\sqrt{98}$.

4.3.4. **Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах** $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, **де** $|\vec{m}| = 2$; $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m} \,\hat{}\, \vec{n}) = \frac{5}{6}\pi$.

Відповідь: $\frac{5}{2}$.

4.3.5. **Виразити через вектори** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **одиничний вектор** $\vec{c}$, **перпендикулярний до векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **і такий, що трійка векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **– права, якщо відомо, що** $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 4$; $(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}(\vec{a} \times \vec{b})$.

4.3.6. **Обчислити площу паралелограма, діагоналями якого є вектори** $\vec{d_1} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d_2} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$, **де** $\vec{a}$, $\vec{b}$ **– одиничні вектори та** $(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

4.3.7. Вектори $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ зв'язані співвідношенням $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r} = 0$. Довести, що $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q} = \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$. Який геометричний зміст цього результату?

4.3.8. Знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a_1} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{a_2} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ та задовольняє умову $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}) = 48$.

Відповідь: $24\overrightarrow{i} + \frac{144}{13}\overrightarrow{j} + \frac{24}{13}\overrightarrow{k}$.

4.3.9. Кут між векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Обчислити $((2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times \times (3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}))^2$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 1$; $|\overrightarrow{b}| = 4$.

Відповідь: 2028.

4.3.10. Довести, що площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, можна знайти за допомогою формули

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \\ (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) & (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) \end{vmatrix}}.$$

4.3.11. Знайти величину моменту сили $\overrightarrow{F} = (5; -2; 4)$ відносно початку координат, якщо точка $A(2; 3; -2)$ – точка прикладання сили F.

Зауваження. Момент сили відносно початку координат дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили на силу $\overrightarrow{F}$.

Відповідь: $\sqrt{749}$.

4.3.12. Довести формулу Лапласа $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) \\ (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) & (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) \end{vmatrix}$.

Заняття 5
Змішаний добуток векторів

5.1. Змішаним добутком векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (позначається $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ або $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$) називається $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Якщо у просторі задано ортонормований базис $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, який має додатну орієнтацію (права трійка векторів), і координати векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ у цьому базисі дорівнюють відповідно

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z);\ \overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z);\ \overrightarrow{c} = (c_x, c_y, c_z), \text{ то}$$

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ утворюють праву трійку векторів, то $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} > 0$, а якщо $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – ліва трійка векторів, то $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} < 0$.

Геометричний зміст змішаного добутку: об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, дорівнює

$$V = |\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}|.$$

5.2. Заняття.

5.2.1. Довести, що: 1) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$;
2) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}$.

5.2.2. Перевірити, чи лежать вектори $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ в одній площині.

Відповідь: ні.

5.2.3. Знайти $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$**, якщо** $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$ **;** $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$**;** $(\overrightarrow{a}\,{}^{\wedge}\,\overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{6}$**;** $|\overrightarrow{a}| = \mathbf{6}$; $|\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = \mathbf{3}$**.**

Відповідь: $\pm\mathbf{27}$**.**

5.2.4. Довести, що $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot ((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$**.**

5.2.5. Довести, що 4 точки $A(1;2;-1)$**;** $B(0;1;5)$**;** $C(-1;2;1)$**;** $D(2;1;3)$ **лежать в одній площині.**

5.2.6. Об'єм тетраедра дорівнює 5; три його вершини знаходяться у точках $A(2;1;-1)$**;** $B(3;0;1)$**;** $C(2;-1;3)$**. Знайти координати четвертої вершини** D**, якщо відомо, що вона лежить на осі** OY**.**

Відповідь: $D(0; -7; 0)$; $D(0; 8; 0)$.

5.2.7. З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори
$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

Відповідь: праву.

5.2.8. Довести, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні, якщо

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) = 0.$$

5.2.9. Обчислити $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})$, якщо відомо, що $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 7$.

Відповідь: 14.

5.2.10. Довести, що $(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix}$.

5.3. Завдання.

5.3.1. Установити компланарність векторів $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 11\overrightarrow{k}$.

5.3.2. Знайти об'єм паралелепіпеда та довжину висоти, проведеної з вершини D, **якщо вершинами паралелепіпеда є точки** $A(4;4;3)$; $B(2;1;-2)$; $C(3;0;2)$; $D(1;-2;0)$.

Відповідь: $V = 18$; $h = \dfrac{18}{\sqrt{323}}$.

5.3.3. Перевірити, праву чи ліву трійку утворюють вектори

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k};\ \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k};\ \overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Відповідь: ліву.

5.3.4. Довести, що $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} + \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b})$**, де** λ**,** μ **– довільні числа.**

5.3.5. При якому значенні λ **вектори** $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \lambda\overrightarrow{k};\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k};\ \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ **лінійно залежні?**

Відповідь: $\lambda = 3$**.**

5.3.6. Точки $A(-1; 2; -3)$**;** $B(-2; 5; 1)$**;** $C(-1, 6, 0)$**;** $D(2; 5; -6)$ **– вершини чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский.**

5.3.7. Відрізок OH є висотою тетраедра $OABC$. Знайти вектор $\overrightarrow{OH}$, якщо відомі вектори $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$.

Відповідь: $\pm \dfrac{|abc|((\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}))}{|(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})|^2}$.

5.3.8. Вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ утворюють праву трійку та взаємно перпендикулярні. Відомо, що $|\overrightarrow{a_1}| = 2$; $|\overrightarrow{a_2}| = 3$; $|\overrightarrow{a_3}| = 6$. Обчислити $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$.

Відповідь: 36.

5.3.9. Довести тотожність $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = 3\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

5.3.10. **Довести, що для будь-яких векторів $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ вектори $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ та $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ – компланарні. Дати геометричну інтерпретацію.**

Заняття 6
Пряма лінія на площині. Поділ відрізка у даному відношенні

6.1. Нагадаємо, що, крім відомого зі школи рівняння вигляду $y = kx + b$, пряма лінія на площині може бути подана:

а) загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$, в якому числа (A, B) утворюють координати вектора, перпендикулярного до прямої;

б) параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad t \in (-\infty,\ \infty),$$

де (x_0, y_0) – координати точки на прямій, а пара (α, β) утворює координати так званого напрямного вектора, паралельного прямій;

в) канонічним рівнянням $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$;

г) рівнянням прямої за відомими координатами двох точок $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

6.2. Заняття.

6.2.1. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1; 2)$:

а) паралельно прямій $2x + 3y = 0$;

б) перпендикулярно до прямої $2x + 3y = 0$;

в) паралельно OX;

г) паралельно бісектрисі кута XOY.

6.2.2. Скласти рівняння висоти, бісектриси та медіани трикутника MNP ($M(1;2)$, $N(-2;6)$, $P(13;-3)$), що виходять з M. Звернути увагу на те, яким виглядом рівняння прямої зручніше скористатись у кожному випадку.

6.2.3. Знайти відстань від точки $M(-3;4)$ до прямої $12x+5y+1=0$.

Відповідь: $\frac{15}{13}$.

6.2.4. Знайти кут між прямими:

а) $2x+y-1=0$ та $y-x=2$;

б) $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4}$ та $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}$;

в) $\begin{cases} x=3t, \\ y=-1+2t \end{cases}$ та $x+2y+9=0$.

6.2.5. З'ясувати, яке взаємне розміщення прямих:

а) $x-3y-2=0$ та $2x+y-1=0$.

б) $x + 3y - 1 = 0$ та $2 - 3x - 9y = 0$.

6.2.6. Яким буде взаємне розміщення прямих $ax - 4y = 6$ та $x - ay = 3$?

6.2.7. Знайти координати точки M, що належить прямій $y = 5x - 4$ та має однакову відстань до точок $M_1(1; 0)$ та $M_2(-2; 1)$.

Відповідь: (3;11).

6.2.8. Знайти координати центрів вписаного та описаного кіл, якщо координатами вершин трикутника є $A(20; 15)$, $B(-16; 0)$, $C(-8; -6)$.

Відповідь: центр вписаного кола – $(-8;-1)$, описаного – $\left(-\frac{3}{16};\frac{51}{4}\right)$.

6.2.9. Відрізок AB, де $A(3,2)$, $B(15,6)$, поділено на п'ять рівних частин. Знайти координати точок поділу.

6.2.10. Знайти координати точки перетину медіан трикутника за координатами вершин.

Відповідь: $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

6.3. Завдання.

6.3.1. Знайти кут між прямими $y = x - 5$ та $y = 7x - 2$.

6.3.2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;1)$ перпендикулярно до прямої $3x - 2y + 1 = 0$.

6.3.3. Скласти рівняння сторони AB, медіани CM, бісектриси BK і висоти AH трикутника ABC, якщо $A(4;6)$, $B(-4,0)$, $C(-1;-4)$.

6.3.4. Перевірити, що точки $M_1(1;3), M_2(5;7), M_3(10;12)$ розташовані на прямій.

6.3.5. У трикутнику ABC $(A(1;2),\ B(3,7),\ C(5;-13))$ з точки B проведено перпендикуляр до медіани AM. Знайти його довжину.

Відповідь: $\dfrac{25}{\sqrt{34}}$.

6.3.6. Скласти рівняння прямої, що симетрична прямій $3x-y+5=0$ відносно прямої $x+y=1$.

Відповідь: $x-3y+7=0$.

Заняття 7
Площина у просторі

7.1. Загальне рівняння площини у просторі має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Числа A, B, C утворюють трійку координат так званого вектора нормалі $\overrightarrow{n}$, перпендикулярного до площини.

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ можна знайти як кут між $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ та $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у просторі до площини можна знайти за формулою

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

7.2. Заняття.

7.2.1. З'ясувати, чи належить точка $O(0; 0; 0)$ площині $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

7.2.2. Скласти рівняння координатних площин XOY, XOZ і YOZ.

7.2.3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 2; 3)$ перпендикулярно до вектора $-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$.

7.2.4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0; 0; 8)$ паралельно векторам $\overrightarrow{a}(1; 2; 3)$ та $\overrightarrow{b}(-1; 0; 3)$.

Відповідь: $3x-3y+z-8=0$.

7.2.5. Написати рівняння площини, якщо відомі координати трьох її точок: $M_1(1;1;1), M_2(-1;0;4), M_3(2;2;-1)$.

Відповідь: $x+y+z-3=0$.

7.2.6. Знайти відстань від точки $M(1;1;1)$ до площини $2x-3y+6z-19=0$.

7.2.7. З'ясувати, як розташовані у просторі одна відносно одної такі площини:

а) $x+y+z-3=0$ та $-2x-2y-2z+1=0$;

б) $x+y+z-3=0$ та $2x+y+z-3=0$;

в) $x+y+z-3=0$ та $-2x-2y-2z+6=0$.

7.2.8. Довести, що площини $-4x+3y-z+6=0$ та $-x-y+z+1=0$ перпендикулярні.

7.2.9. Знайти кут між площинами $-2x+y+2z-1=0$ та $-4x-7y+4z=0$.

Відповідь: $arrccos\,\frac{1}{3}$.

7.2.10. Скласти рівняння площин, що поділяють навпіл двогранні кути між площинами $2x + 2y - z = 0$ та $-3y + 4z = 0$. Зробити пояснювальний рисунок.

Відповідь: $10x + y + 7z = 0,\ 10x + 19y - 17z = 0$.

7.3. Завдання.

7.3.1. Скласти рівняння площин, паралельних площині XOY та розташованих від неї на відстані 1.

7.3.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 1; 1)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ та координатній осі OZ.

Відповідь: $2x - y - 1 = 0$.

7.3.3. Знайти відстань між паралельними площинами $x - 6y - 18z - 15 = 0$ та $x - 6y - 18z + 23 = 0$.

Відповідь: 2.

7.3.4. Перевірити, чи належать точки $M_1(0;1;2)$, $M_2(2;0;-1)$, $M_3(-1;5;0)$ та $M_4(0;0;3)$ до однієї площини, та скласти рівняння цієї площини.

Відповідь: $2x+y+z-3=0$.

7.3.5. Знайти кут між площиною $2x-6y-3z+1=0$ та площиною, що проходить через точку $M(4;3;4)$ та вісь OX.

Відповідь: $arccos\frac{3}{7}$.

7.3.6. Скласти рівняння площин, паралельних площині $6x-3y+2z+5=0$ та розташованих від неї на відстані 3.

Відповідь: $6x-3y+2z+26=0$ та $6x-3y+2z-16=0$.

Заняття 8
Пряма лінія у просторі

8.1. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\ (l^2+m^2+n^2\neq 0).$$

Числа x_0, y_0, z_0 – координати точки M_0, що належить прямій, а трійка (l, m, n) утворює координати так званого напрямного вектора (паралельного прямій).

Якщо відомі координати двох різних точок прямої $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то рівняння прямої буде

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Для розв'язання деяких задач корисне також так зване параметричне рівняння
$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$
в якому (x_0, y_0, z_0) – координати точки, (l, m, n) – координати напрямного вектора, а t – будь-яке число $t\in(-\infty; +\infty)$.

8.2. Заняття.

8.2.1. Довести, що точка $M(3; 4; 5)$ розташована на прямій

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{6}.$$

8.2.2. Скласти канонічне та параметричне рівняння осі OX.

8.2.3. Скласти рівняння медіани AM трикутника ABC, в якому $A(1; 2; 3)$, $B(-3; 4; 3)$, $C(1; 2; 1)$.

8.2.4. **Довести, що рівняння** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{2}$ **та** $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 12 - 10t, \\ z = 7 - 4t \end{cases}$ **задають одну пряму.**

8.2.5. **Знайти кут між прямими** $\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{-3}$ **та** $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-2}$.

8.2.6. **Знайти координати точки перетину прямої** $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ **та площини** $x + y + z - 3 = 0$.

Відповідь: $(1; 1; 1)$.

8.2.7. **Скласти рівняння перпендикуляра з точки** $M(-1; 0; 1)$ **до площини** $x + y + z + 6 = 0$. **Знайти координати проекції поданої точки на площину.**

8.2.8. **Знайти кут між прямою** $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ **та площиною** $2x + 6y - 3z + 5 = 0$.

8.2.9. Довести, що пряма $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}$ належить площині $x+y+z-6=0$.

8.2.10. Скласти канонічні рівняння прямої, поданої у вигляді лінії перетину площин $\begin{cases} x+y+z-6=0, \\ -x+2y-3z+4=0. \end{cases}$

8.2.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;3)$ та пряму $\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Відповідь: $5x-4y-2z+9=0$.

8.2.12. Довести, що прямі $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{7}$, $\frac{x+2}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-8}$ перетинаються, та скласти рівняння площини, що проходить через них.

Відповідь: площина $18x + 5y - 8z + 28 = 0$.

8.2.13. Складти рівняння ортогональної проекції прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ **на площину** $x + y + z - 3 = 0$.

8.2.14. Скласти рівняння бісектриси AK **у трикутнику** ABC: $A(0;0;0)$, $B(-2;2;1)$, $C(12;3;-4)$.

8.2.15. Довести, що прямі лінії $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}$ **та** $\frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ **є перехресними, та знайти відстань між ними.**

Відповідь: $2\sqrt{21}$.

8.2.16. Знайти відстань від точки $M(1;2;3)$ до прямої $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \;= \frac{z}{-2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2394}}{14}$. Можна почати з того, що скласти рівняння площини, перпендикулярної до поданої прямої.

Додаткові завдання:

8.2.17. Дослідити, чи перетинає відрізок M_1M_2 площину $10x+y+z+ +1=0$, якщо $M_1(1;2;-3)$, $M_2(0;-3;-4)$.

8.2.18. Дослідити, яким буде взаємне розміщення у просторі двох прямих $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ та $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$.

8.2.19. Дослідити, яким буде взаємне розміщення у просторі поданих прямої та площини $3a^2x+ay+z-4a=0$, $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-2}{-1}$.

8.3. Завдання.

8.3.1. Скласти рівняння медіани AM трикутника ABC, якщо $A(-1;3;7)$, $B(0;0;2)$, $C(-4;10;12)$.

8.3.2. З'ясувати, яким буде взаємне розміщення прямих $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-4}$ та
$$\begin{cases} x = -4t+11, \\ y = -6t+18, \\ z = 8t-23. \end{cases}$$

8.3.3. Знайти кут між прямою $\frac{x}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-7}$ та площиною $4x+4y-7z+ +1=0$.

8.3.4. Знайти координати проекції точки $M(0;0;0)$ на площину $-x-2y+ +2z-18=0$.

Відповідь: $(-2; -4; 4)$.

8.3.5. **Довести, що пряма** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ **паралельна площині** $5x - 2y + 4z - 1 = 0$.

8.3.6. **Скласти канонічне рівняння прямої** $\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0, \\ 5x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{11} = \frac{z}{-4}$.

8.3.7. Скласти рівняння площини, що проходить через паралельні прямі $\frac{x}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$, $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{6}$.

8.3.8. Довести, що прямі $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ **та** $\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{0}$ **перетинаються.**

8.3.9. Скласти рівняння ортогональної проекції прямої $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-3}{1}$ **на площину** $\boldsymbol{x+y+z=0}$**.**

Відповідь: $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{5}$.

8.3.10. Скласти рівняння висоти $\boldsymbol{AH}$ **трикутника** $\boldsymbol{ABC}$**:** $\boldsymbol{A(0;0;0)}$, $\boldsymbol{B(2;3;-6)}$, $\boldsymbol{C(3;0;-4)}$.

Відповідь: $\frac{x}{-47} = \frac{y}{-15} = \frac{z}{46}$.

8.3.11. Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$ **та** $\frac{x+2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{23}{2}}$.

8.3.12. Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{1}$ **та** $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Заняття 9
Контрольна робота
Векторна алгебра. Площина та пряма у просторі

<u>**Завдання 1**(табл. 1).</u> Відомі $|\overrightarrow{m}|$ та $|\overrightarrow{n}|$, а також кут, утворений векторами $\overrightarrow{m}$ та $\overrightarrow{n}$. Для даних чисел α_1, β_1, α_2, β_2 потрібно знайти:

а) $|\alpha_1\overrightarrow{m} + \beta_1\overrightarrow{n}|$;

б) кут між $\alpha_1\overrightarrow{m} + \beta_1\overrightarrow{n}$ та $\alpha_2\overrightarrow{m} + \beta_2\overrightarrow{n}$.

<u>**Завдання 2**(табл. 2).</u> Відомі координати чотирьох вершин піраміди $ABCD$.

Треба знайти:

а) довжину AB;

б) кут між AB та BC;

в) площу трикутника ABC;

г) об'єм піраміди;

д) довжину висоти DH піраміди (проведеної до площини ABC).

Потрібно скласти рівняння:

а) прямої AB;

б) площини ABC;

в) висоти DH, проведеної з D перпендикулярно до площини ABC;

г) медіани AM трикутника ABC;

д) висоти AK трикутника ABC;

е) бісектриси AL трикутника ABC.

Варіант 1.

N3. Знайти $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = 3, |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{5}$.

N4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1; 1; 2)$ та пряму $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{2}$.

N5. Знайти відстань між прямими $\frac{x+3}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}$ та $\begin{cases} x = 5, \\ 2y + z - 19 = 0. \end{cases}$

Варіант 2.

N3. Знайти $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 13, |\overrightarrow{b}| = 19, |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 24$.

N4. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ та $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

N5. Знайти координати проекції точки $M(-1; 0; 0)$ на пряму лінію $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

Варіант 3.

N3. Для яких λ вектори $\lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$ компланарні, якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – некомпланарні?

N4. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину A трикутника ABC перпендикулярно до медіани BM, якщо $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$, $C(5; 1)$.

N5. Скласти рівняння бісекторних площин для $2x - y - 2z + 1 = 0$, $3x + 4y - 7 = 0$.

Таблиця 1

Варіант	$\lvert\vec{m}\rvert$	$\lvert\vec{n}\rvert$	$\widehat{\vec{m}\,\vec{n}}$	α_1	β_1	α_2	β_2
1	1	1	120°	1	2	−1	3
2	1	1	150°	1	−1	2	3
3	1	2	120°	1	−2	3	1
4	1	2	60°	1	−2	1	3
5	2	1	60°	1	−2	1	3
6	2	1	150°	1	−2	1	3
7	2	2	120°	1	2	−1	3
8	2	2	150°	1	2	−1	3
9	2	2	60°	3	1	−1	−1
10	1	3	60°	3	1	2	−1
11	1	3	120°	3	1	2	−1
12	1	3	30°	3	2	−1	2
13	1	3	150°	3	2	−1	3
14	1	3	150°	1	−1	−1	2
15	1	1	60°	1	−1	−1	2
16	1	2	60°	1	2	3	−1
17	1	2	120°	1	−1	−1	−1
18	3	2	60°	2	−2	−1	−3
19	3	2	120°	1	1	−1	2
20	1	1	45°	−1	2	3	4
21	1	1	30°	−1	2	3	2
22	1	1	135°	−1	2	2	3
23	2	1	30°	−1	2	3	4
24	2	1	135°	1	3	1	−2
25	2	1	45°	1	3	4	−3
26	1	2	45°	5	1	−1	1
27	1	2	45°	5	2	−1	2
28	1	2	45°	−3	1	1	1
29	2	2	45°	−2	1	1	1
30	2	3	45°	−3	1	1	1

Таблиця 2

Варіант	Координати A	Координати B	Координати C	Координати D
1	$-1,0,0$	$1,-2,-1$	$-1,6,1$	$-1,0,2$
2	$-1,1,1$	$2,1,5$	$-1,7,1$	$-1,1,2$
3	$-1,0,1$	$1,2,0$	$-1,6,1$	$-1,0,2$
4	$-1,3,2$	$0,1,0$	$-1,-3,0$	$-1,3,2$
5	$-1,2,1$	$0,0,-1$	$-1,-4,0$	$-1,2,2$
6	$-1,3,6$	$0,1,4$	$-1,-3,0$	$-1,3,2$
7	$-1,1,0$	$0,-1,2$	$-1,7,1$	$-1,1,2$
8	$-1,-1,1$	$2,-1,5$	$-1,5,0$	$-1,-1,2$
9	$1,2,3$	$4,6,3$	$1,8,0$	$1,2,2$
10	$1,3,2$	$1,0,-2$	$1,9,2$	$-1,-3,-2$
11	$1,-2,3$	$1,10,8$	$1,4,0$	$2,-2,2$
12	$1,-3,2$	$1,2,14$	$1,3,0$	$1,-3,2$
13	$1,-2,-3$	$0,0,-1$	$1,4,0$	$1,-2,2$
14	$2,1,0$	$0,0,2$	$2,7,1$	$2,1,2$
15	$2,-1,0$	$0,0,2$	$2,5,1$	$2,-1,2$
16	$2,0,1$	$0,-2,0$	$2,6,0$	$2,0,2$
17	$2,0,-1$	$0,-2,0$	$2,6,0$	$2,0,2$
18	$3,0,4$	$0,0,0$	$3,6,0$	$3,0,2$
19	$5,0,1$	$0,0,-11$	$5,6,0$	$5,0,2$
20	$3,7,1$	$0,1,-1$	$3,13,1$	$3,7,2$
21	$-1,2,3$	$5,0,0$	$-1,8,0$	$-1,2,2$
22	$0,1,-1$	$6,3,2$	$0,-5,1$	$0,1,2$
23	$0,1,0$	$2,0,-2$	$0,-5,2$	$0,1,2$
24	$2,1,3$	$0,0,1$	$2,7,0$	$2,1,1$
25	$2,3,1$	$0,0,7$	$2,-3,0$	$2,3,1$
26	$2,3,-1$	$0,0,5$	$2,-3,0$	$2,3,1$
27	$2,-1,3$	$0,5,0$	$2,5,0$	$2,-1,1$
28	$2,-1,-3$	$0,5,0$	$2,5,0$	$2,-1,1$
29	$2,-3,-1$	$0,0,5$	$2,3,0$	$2,-3,1$
30	$-2,-3,-1$	$0,0,5$	$-2,3,0$	$-2,3,1$

Варіант 4.

N3. Знайти $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = 3, |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{5}$.

N4. Знайти координати точки перетину прямої $\begin{cases} x + y = 0, \\ 5x - 2y - z = 0 \end{cases}$ та площини $x + 2y + z - 6 = 0$.

N5. Знайти відстань між прямими $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ та $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Варіант 5.

N3. Довести, що вектори $\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ та $11\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ завжди компланарні.

N4. Скласти рівняння площини, до якої належать прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$ та $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$.

N5. Знайти координати проекції точки $M(3; 2; 3)$ на пряму лінію $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-1}$.

Варіант 6.

N3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{a}$, перпендикулярного до векторів $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ і такого, що $|\overrightarrow{a}| = 10\sqrt{3}$.

N4. Знайти кут між площинами $2x - 6y + 3z + 1 = 0$ та $-4x + 12y - 6z + 3 = 0$.

N5. Знайти координати точки, симетричної до $M(0; 1; 2)$ відносно прямої $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

Варіант 7.

N3. Спростити вираз $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}) \times (-2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c})(2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + 13\overrightarrow{c})$.

N4. З'ясувати, яким є розміщення прямих $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ та $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ x + 5y + z - 7 = 0. \end{cases}$

N5. Знайти координати точки, симетричної до $M_1(-1; 0; 3)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-1}$.

Варіант 8.

N3. Знайти $|(\overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})(\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c})|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = \overrightarrow{c} = 1$, вектор $\overrightarrow{c}$ – перпендикулярний одночасно до $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, а вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ утворюють кут 30°.

N4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0; 1; 2)$ та пряму $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t + 2, \\ z = t + 1. \end{cases}$

N5. З'ясувати, чи перетинає відрізок M_1M_2 площину $x + y + z - 12 = 0$, якщо $M_1(0; 0; 0)$, $M_2(5; 6; 7)$.

Варіант 9.

N3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{c}$, перпендикулярного одночасно до векторів $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ так, щоб $\overrightarrow{c}$ задовольняв умову $\overrightarrow{c}(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}) = -28$.

N4. Довести, що прямі $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ та $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{0}$ перетинаються.

N5. Знайти координати точки M, що належить прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-1}$ та розташована на однакових відстанях від точок $A(3;0;-2)$ та $B(-1;1;5)$.

Варіант 10.

N3. Знайти кут між $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = 2, |2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}| = \sqrt{52}$.

N4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;8)$ паралельно лінії перетину площин $x + y + z - 3 = 0$ та XOY.

N5. З'ясувати, яким буде взаємне розміщення прямої $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ та площини $3ax + y + z - 5 = 0$.

Варіант 11.

N3. Знайти $|\overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} - \overrightarrow{p}|$, якщо $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{m}| = 2, \overrightarrow{p} = 1$, кут між $\overrightarrow{m}$ та $\overrightarrow{n}$ дорівнює 60^{0}, кути між $\overrightarrow{m}$ та $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{n}$ та $\overrightarrow{p}$ дорівнюють 90^{0}.

N4. Скласти рівняння прямої лінії, що проходить через точку $M(-1;7;2)$ паралельно лінії перетину площин $x + y + 4z = 0$ та YOZ.

N5. Знайти координати такої точки A на прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$,яка знаходиться на однакових відстанях від точок $B(7;1;-1)$ та $C(6;0;3)$.

Варіант 12.

N3. Знайти координати $\overrightarrow{x}$, якщо $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{x} \perp 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, а модуль вектора $\overrightarrow{x}$ дорівнює $6\sqrt{3}$.

N4. Перевірити, що точки $A(-1;3;4;), B(0;1;5), C(-2;3;5)$ та $D(6;0;0)$ належать одній площині, та скласти рівняння площини.

N5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;3;2)$ паралельно площині XOY та утворює кут 45^{0} з прямою $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. Скільки відповідей має задача?

Варіант 13.

N3. Спростити вираз $|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})| + (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, якщо $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ – одиничні вектори, що утворюють кут 120^{0}.

N4. Довести, що точки $A(1;-1;0),\ B(3;2;-1)$ та $C(-1;-4;1)$ розташовані на прямій лінії, та скласти рівняння прямої.

N5. Скласти канонічне рівняння висоти AH трикутника ABC, якщо $A(4;1;-2),\ B(2;0;0),\ C(-2;3;-5)$.

Варіант 14.

N3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$, паралельного $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, щоб $|\overrightarrow{x}| = 45$ та $\overrightarrow{x}$ утворював з ортом $\overrightarrow{k}$ гострий кут.

N4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(0;1;3)$ та пряму $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$.

N5. Знайти відстань між перехресними прямими $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-6}{4}$, $\frac{x+4}{5} = \frac{y+4}{6} = \frac{z+}{3}$

Варіант 15.

N3. Знайти $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 13$, $|\overrightarrow{b}| = 18$, $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 25$.

N4. Скласти рівняння проекції прямої $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$ на площину $5x - y + z - 1 = 0$.

N5. Скласти рівняння площини, розташованої на однакових відстанях від площин $5x - 3y + z + 3 = 0$ та $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

Варіант 16.

N3. Знайти $|(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 3$, кут між $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ дорівнює 150^0 і $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$.

N4. Знайти кут між прямими $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{5}$ та $\begin{cases} x + 3y - z + 2 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$

N5. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3; -2; -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ та перетинає пряму $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-3}{-2}$.

Варіант 17.

N3. З'ясувати, для яких λ вектори $\lambda\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{b} + \lambda\overrightarrow{c}$ – компланарні, якщо $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – некомпланарні.

N4. Скласти рівняння площини, що проходить через паралельні лінії $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{4}$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{4}$.

N5. Скласти рівняння прямої, симетричної до прямої $-x+3y+5 = 0$ відносно прямої $x + y = 1$.

Варіант 18.

N3. Спростити вираз $(\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}) \times (-2\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} + 8\overrightarrow{c})$.

N4. Знайти координати проекції точки $A(7; 1; 1)$ на площину $x - 2y + z - 4 = 0$.

N5. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо відомі координати $A(1; 3)$ та рівняння двох медіан: $y = x + 4$ та $x = -1$.

Варіант 19.

N3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$, якщо $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = 2$, $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$.

N4. Довести, що прямі лінії $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ та $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$ перетинаються, та скласти рівняння площини, що проходить через них.

N5. Нехай $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ (A, B, C, D – вершини будь-якої піраміди). Довести, що $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$.

Варіант 20.

N3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{x}$, перпендикулярного до площини ABC :

$A(1;3;4)$, $B(-1;0;9)$, $C(3;2;3)$, якщо $|\overrightarrow{x}| = 5\sqrt{3}$.

N4. З'ясувати, яким є взаємне розміщення прямих $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$ та $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

N5. Скласти рівняння сторін ромба, якщо його діагоналі перетинаються у точці $(-1;2)$, а більша з діагоналей паралельна лінії $y = 0$. Гострий кут ромба дорівнює 60^0, а довжина сторони – 2.

Варіант 21.

N3. Обчислити $|\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + 2\overrightarrow{p}|$, якщо $|\overrightarrow{m}| = 1, |\overrightarrow{n}| = 2, |\overrightarrow{p}| = 3$, $\overrightarrow{m}^\wedge\overrightarrow{n} = 120^0$, $\overrightarrow{m}^\wedge\overrightarrow{p} = 60^0$, $\overrightarrow{n}^\wedge\overrightarrow{p} = 90^0$.

N4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1;0;0)$ та пряму $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-3}$.

N5. Скласти рівняння прямої, симетричної до прямої $3x - y + 5 = 0$ відносно прямої $x + y = 1$.

Варіант 22.

N3. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$ на вектор $\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$, якщо $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 2, |\overrightarrow{p}| = 1, \overrightarrow{m}^\wedge\overrightarrow{n} = 60^0, \overrightarrow{m}^\wedge\overrightarrow{p} = 60^0, \overrightarrow{n}^\wedge\overrightarrow{p} = 90^0$.

N4. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ 2x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ та $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-3}$.

N5. Знайти відстань між прямими $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$ та $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

Варіант 23.

N3. Знайти такі значення λ, щоб вектори $\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$, $2\lambda\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} + 6\overrightarrow{c}$, $7\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b} + 9\overrightarrow{c}$ були компланарні, якщо $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ – некомпланарні.

N4. Знайти координати проекції точки $M(7;0;-1)$ на площину $x - 2y - 3z - 38 = 0$.

N5. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до перехресних прямих $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$ та $\frac{x-9}{6} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z}{-1}$.

Варіант 24.

N3. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ на напрямний вектор прямої $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x + 3y + 4z - 7 = 0. \end{cases}$

N4. З'ясувати, яким є взаємне розміщення прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-4}$ та площини $3x + 2y - 3z - 2 = 0$.

N5. Знайти координати центра сфери, описаної навколо $ABCD$: $A(1;2;3)$, $B(-2;8;9)$, $C(5;0;7)$, $D(3;4;2;)$.

Варіант 25.

N3. Обчислити $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \times (2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c})$, якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – одиничні вектори, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b} = 30^\circ$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

N4. Знайти координати проекції точки $M(-1; 2; 3)$ на площину $3x + y - z - 7 = 0$.

N5. Яким буде взаємне розміщення прямих у просторі: $\frac{x-a}{a}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-1}{6}$ та $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{2}$?

Варіант 26.

N3. З'ясувати, чи належать точки $A(-1; 7; 2)$, $B(0; 0; 0)$, $C(3; 2; 1)$, $D(0; -1; 3)$ одній площині?

N4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2; 10)$ паралельно лінії перетину площин XOZ та $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

N5. Знайти відстань від точки $O(0; 0; 0)$ до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{5}$.

Варіант 27.

N3. Відомо, що $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, а вектори $\lambda\vec{a} + 2\vec{b} + 3\lambda\vec{c}$, $4\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c}$, $7\vec{a} + 8\vec{b} + 9\lambda\vec{c}$ – компланарні. Знайти λ.

N4. Скласти рівняння проекції прямої $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ на площину $x + y + z - 6 = 0$.

N5. З'ясувати, чи перетинає відрізок M_1M_2 площину $x + 2y + 3z - 17 = 0$, якщо $M_1(0; 0; 0), M_2(7; 2; 3)$.

Варіант 28.

N3. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3\sqrt{7}$. Знайти $|\vec{a} \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

N4. Знайти відстань між площинами $3x - 4y + 12z - 11 = 0$ та $3x - 4y + 12z + 6 = 0$.

N5. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $A(1; 1 - 2)$, $B(3; -5; 2)$, $C(-1; 1; 0)$.

Варіант 29.

N3. Відомо, що $|\vec{a}|=|\vec{b}| = |\vec{c}|=2$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}=120^\circ$, $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=60^\circ$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}|$.

N4. Знайти відстань від точки перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{3}$ та площини $x + y + z - 3 = 0$ до площини $2x - 6y - 9z = 0$.

N5. Написати рівняння спільного перпендикуляра до перехресних прямих $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+4}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Варіант 30.

N3. Знайти $|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$, якщо $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{19}$.

N4. Знайти відстань між площинами $x - 6y + 18z - 1 = 0$ та $x - 6y + 18z + 3 = 0$.

N5. Знайти координати центра кола, вписаного в трикутник ABC, якщо $A(0; 0; 0)$, $B(2; -2; 1)$, $C(3; -4; 0)$.

Заняття 10
Операції над матрицями

10.1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.

10.2. Заняття.

10.2.1. Обчислити: а) $-2A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $4A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,
$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 11 & -3 & 27 \\ -22 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

10.2.2.

а) Чи можна помножити рядок довжини m на стовпчик висоти n?

б) Чи можна помножити стовпчик висоти n на рядок довжини m?

10.2.3. Які умови повинні задовольняти матриці A та B, щоб існували:
а) добуток AB?
б) добуток BA?
в) добутки AB та BA?

10.2.4. Знайти добутки: а) $(0\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -3 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 & -1 \\ 4 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $(2\ \ -1\ 4\ 5)$.

б) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

в) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 26.

г) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2\ \ -3\ \ 0)$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 10 & -15 & 0 \\ 8 & -12 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 58 & -23 & 49 & 81 \\ 78 & 83 & 25 & 99 \\ 38 & -4 & 69 & 95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 49 \\ 25 \\ 69 \end{pmatrix}$.

10.2.5. Знайти добуток AB та BA, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 12 & -41 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 9 \\ 4 & 6 & -4 \\ 7 & 23 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

10.2.6. Знайти добуток $ABCD$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & -39 & 26 \\ 0 & -78 & 52 \\ 0 & 39 & -26 \end{pmatrix}$.

10.2.7. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 15 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

10.2.8. Довести, що суми елементів, які стоять на головних діагоналях квадратних матриць AB і BA, однакові.

10.3. Завдання.

10.3.1. Обчислити: а) $5A - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3 & 13 & -8 \\ -4 & 25 & -11 \\ 28 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

б) $B - 3A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 1 & -10 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$.

10.3.2. Знайти добутки: а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -6 & 15 & -9 \\ -2 & 5 & -3 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 33 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -17 & 41 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -6 \\ -11 & 2 & 30 \\ 21 & -13 & 11 \end{pmatrix}$.

10.3.3. Обчислити AB та BA, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: б) $AB = -13$; $BA = \begin{pmatrix} 5 & -15 & -10 & 0 \\ 4 & -12 & -8 & 0 \\ 3 & -9 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

10.3.4. На яку матрицю треба помножити матрицю $\boldsymbol{A}$, щоб у результаті одержати:

а) перший стовпчик матриці $\boldsymbol{A}$?

б) перший рядок матриці $\boldsymbol{A}$?

10.3.5. Перевірити, чи існує добуток, і, якщо існує, обчислити його:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) не існує; б) $\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$.

10.3.6. Транспонувати матриці:

а) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{n-1} & \dots & \dots \\ c_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

10.3.7. Перевірити тотожності:

а) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

б) $(\boldsymbol{ABC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

в) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.

10.3.8. Обчислити $f(A)$, якщо

а) $f(x) = x^2 - x - 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $f(x) = x^2 + 2x - 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.3.9. Довести, що суми елементів, які стоять на головних діагоналях квадратних матриць AB та BA, однакові.

10.3.10. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n}$.

10.3.11. Квадратна матриця $A = ||a_{ij}||,\ a_{ij} > 0\ \forall i, j$ **називається стохастичною, якщо сума елементів кожного рядка дорівнює 1. Довести, що добуток стохастичних матриць є стохастична матриця.**

10.3.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **Знайти** $det\,A \cdot det\,B$ **та** $det(A \cdot B)$.

Заняття 11
Обернена матриця та обчислення її. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими в матричній формі

11.1. Оберненою для матриці A називається така матриця A^{-1}, що

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Матриця A має обернену матрицю A^{-1} тоді і тільки тоді, коли $detA \neq 0$. Якщо цю умову виконано, то обернена матриця єдина і має таку будову: елементами її k-го стовпця $(k = 1, 2, .., n)$ є алгебричні доповнення відповідних елементів k-го рядка матриці A, поділені на $detA$:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$ називається приєднаною.

Знайти A^{-1} можна також за допомогою методу елементарних перетворювань. Елементарними перетворюваннями матриці називаються:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) елементів другого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число.

Якщо матрицю A за допомогою послідовності елементарних перетворень переведено в одиничну матрицю E, то матриця E за допомогою тієї самої послідовності елементарних перетворень перейде в обернену до A.

11.2. Заняття.

11.2.1. Методом приєднаної матриці знайти обернені, якщо існують:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: обернена матриця не існує.

в) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

д) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

11.2.2. Методом елементарних перетворень знайти обернені матриці до матриць, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & -\frac{17}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & \frac{13}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -6 & 12 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

11.2.3. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\boldsymbol{AX = B}$, якщо $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{X} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

б) $\boldsymbol{YA = B}$, якщо $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{Y} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 & 93 \\ 49 & 263 \end{pmatrix}$.

г) $XA = B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} -3 & 54 & 33 \\ 32 & 18 & -10 \\ -10 & 18 & 20 \end{pmatrix}$.

д) $XA = B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1} = -\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. $X = -\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -7 & -2 \\ -16 & 19 & -11 \end{pmatrix}$.

11.2.4. Розв'язати систему рівнянь за матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 3$.

11.3. Завдання.

11.3.1. За методом приєднаної матриці знайти обернені, якщо вони існують:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -10 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -15 & -30 \\ 0 & -5 & -10 \\ 2 & -6 & -13 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: не існує.

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

11.3.2. За методом елементарних перетворень знайти матрицю, обернену до A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2 & -1,5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$.

11.3.3. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -17 & 8 \end{pmatrix}.$

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^2.$

Відповідь: $X = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 61 & -21 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}.$

11.3.4. Розв'язати систему, використовуючи матричну форму запису системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 17. \end{cases}$

Відповідь: $x_1 = -7; \; x_2 = 24.$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Відповідь: $x_1 = 3; \; x_2 = x_3 = 1.$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Відповідь: $x_1 = 3; \; x_2 = 4; \; x_3 = 5.$

Заняття 12

Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Розв'язування систем m рівнянь з n невідомими

12.1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.

12.2. Заняття.

12.2.1. Обчислити ранг матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12.2.2. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\, A = 2$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\, A = 2$.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\, A = 4$.

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\,A = 2$.

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\,A = 3$.

12.2.3. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: при $\alpha = \pm 3$ ранг матриці дорівнює 3, при всіх інших значеннях ранг дорівнює 4.

12.2.4. Довести, що система несумісна:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Відповідь: система несумісна, тому що rg матриці системи дорівнює 2, а ранг розширеної матриці – 3.

12.2.5. Дослідити систему на сумісність і визначеність та розв'язати її, якщо розв'язки існують:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці та дорівнює 3, тому система сумісна і визначена: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$

Відповідь: система несумісна.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$

Відповідь: ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці та дорівнює 2, тому система сумісна, але невизначена: $x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4$; $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$.

12.2.6. Дослідити на сумісність і визначеність:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$

Відповідь: система несумісна.

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ \qquad\qquad\quad x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

Відповідь: система сумісна, невизначена.

12.2.7. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \gamma \overrightarrow{b}$, **де** $\overrightarrow{b} = \left(\frac{4}{7}; -\frac{13}{7}; 1, 0\right)$.

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \gamma \overrightarrow{b}$, де $\overrightarrow{b} = (1; -1; 0), \gamma$ – будь-який скаляр.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $x_1 = 8x_3 - 7x_4,\ x_2 = -6x_3 + 5x_4$ – загальний розв'язок; $(8, -6, 1, 0)$; $(-7, 5, 0, 1)$ – фундаментальна система розв'язків.

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \gamma \overrightarrow{b_1} + \gamma_2 \overrightarrow{b_1}$, де γ_1, γ_2 – будь-які скаляри – загальний розв'язок; $\overrightarrow{b_1} = (1; -2; 1, 0, 0)$; $\overrightarrow{b_2} = (15, -12, 0, 1, 1)$ – фундаментальна система розв'язків.

12.3. Завдання.

12.3.1. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\, A = 3$.

б) $A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\,A = 3$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\,A = 4$.

г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $rg\,A = 2$.

12.3.2. Знайти ранг матриці за методом обвідних мінорів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $rg\,A = 2$.

12.3.3. Чому дорівнює ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 3 \\ 1 & 10 & -6 & \alpha \end{pmatrix}$$

при різних значеннях α?

Відповідь: якщо $\alpha = 3$, то ранг матриці дорівнює 2, якщо $\alpha \neq 3$, то ранг її дорівнює 3.

12.3.4. Дослідити систему на сумісність і визначеність та розв'язати її, якщо розв'язки існують:

а) $$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

Відповідь: система сумісна, визначена; $x_1 = -3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Відповідь: система несумісна.

12.3.5. При яких λ система $\begin{cases} (5-\lambda)x - 3y + 2z = 0, \\ 6x - (4+\lambda)y + 4z = 0, \\ 4x - 4y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$ має розв'язки, відмінні від нуля?

Відповідь: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$.

12.3.6. Довести, що система $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ має нескінченну кількість розв'язків.

12.3.7. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \gamma_1 \overrightarrow{b_1} + \gamma_2 \overrightarrow{b_2} + \gamma_3 \overrightarrow{b_3}$ – загальний розв'язок; $\overrightarrow{b_1} = (1; 2; 0, 0, 0)$; $\overrightarrow{b_2} = (0, 13, 5, 1, 0)$; $\overrightarrow{b_3} = (0, 1, -1, 0, 1)$ – фундаментальна система розв'язків.

б) (додаткова) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\overrightarrow{x} = \gamma_1 \overrightarrow{b_1} + \gamma_2 \overrightarrow{b_2} + \gamma_3 \overrightarrow{b_3}$ – загальний розв'язок; $\overrightarrow{b_1} = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right)$; $\overrightarrow{b_2} = \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0\right)$; $\overrightarrow{b_3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$ – фундаментальна система розв'язків; γ_1, γ_2, γ_3 – будь-які скаляри.

Заняття 13

Лінійний простір. Простір зі скалярним добутком

13.1. Множини $\boldsymbol{L}$ елементів (які будемо називати векторами) має назву "лінійний простір", якщо:

1) вказано множину $\boldsymbol{K}$ скалярів (наприклад, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел або $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ – комплексних чисел);

2) вказано операцію додавання елементів: будь-яким $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ однозначно відповідає елемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$ (сума):

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L};$$

3) вказано закон множення на скаляр: будь-якому $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K}$ та $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ однозначно відповідає $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\alpha x} \in \boldsymbol{L}$;

4) операції $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{\alpha x}$ задовольняють вісім умов:

а) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$; б) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$; в) існує "нуль-вектор", тобто $\mathbf{o} \in \boldsymbol{L}, \boldsymbol{x} + \mathbf{o} = \boldsymbol{x}$; г) існує протилежний вектор "$-\boldsymbol{x}$" $\in \boldsymbol{L}, \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{o}$; д) $\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$; е) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta x}) = (\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{x}$; є) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\beta x}$; ж) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{\alpha y}$.

Система елементів $\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}$ лінійного простору має назву "лінійно залежної", якщо існують $\alpha_1, ..., \alpha_\mathrm{n},\ \alpha_1^2 + ... + \alpha_\mathrm{n}^2 \neq 0$ такі, що

$$\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2 + ... + \alpha_\mathrm{n} \mathrm{x}_\mathrm{n} = 0.$$

Базисом векторного простору називаємо лінійно незалежну систему $\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n} \in \mathrm{L}$, якщо для будь-якого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ існують такі $\alpha_1, ..., \alpha_\mathrm{n}$, що

$$\mathrm{x} = \mathrm{e}_1 \alpha_1 + \alpha_2 \mathrm{e}_2 + ... + \alpha_\mathrm{n} \mathrm{e}_\mathrm{n}$$

($\boldsymbol{n}$ називають вимірністю лінійного простору).

Якщо у лінійному просторі $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R})$ кожній парі $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ відповідає дійсне число, яке позначається символом $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ або $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, і така операція задовольняє властивостям:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$; в) $(\boldsymbol{\alpha x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha y}),\ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R}$;

б) $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$; г) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \mathbf{o}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{o} <=> \boldsymbol{x} = \mathbf{o})$,

то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ має назву "скалярний добуток", а $\boldsymbol{L}$ – евклідів простір. У такому випадку можна ввести поняття довжини вектора

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Для будь-яких векторів $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ виконано нерівність Коші-Буняковського

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

яка дозволяє визначити кут між $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{o}$ та $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{o}$:

$$\boldsymbol{cos}\gamma = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|}.$$

Якщо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{o}$, вектори $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ називають ортогональними.

Якщо $\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_\mathrm{n}$ – базис, $\mathrm{e}_\mathrm{i} \perp \mathrm{e}_\mathrm{j}$, а $|\mathrm{e}_\mathrm{i}| = 1$, то базис має назву ортонормованого.

13.2. Заняття.

Визначити, які з множин утворюють лінійний простір. Відповідь обгрунтувати. У випадку позитивної відповіді навести приклад будь-якого базису, знайти вимірність (13.2.1 - 13.2.10).

13.2.1. Множина геометричних векторів у просторі.

Відповідь: утворює; вимірність 3; базис: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

13.2.2. Множина R^n **стовпчиків** $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathrm{R}$ **із звичайними додаванням і множенням на число.**

Відповідь: утворює n**-мірний простір; базис:** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

13.2.3. Множина $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_i \in \mathrm{R},\ x_1 = 1 \right\}$.

Відповідь: ні.

13.2.4. Множина багаточленів степеня 2 $- a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2 \neq 0$.

Відповідь: ні.

13.2.5. Множина багаточленів степеня, не вищого за 2.

Відповідь: утворює тривимірний простір. Приклади базисів: $1, \ x, \ x^2$ або $1, \ (x-1), \ (x-1)^2, \ \ldots$ Увага: треба довести лінійну незалежність.

13.2.6. Множина векторів на площині, перпендикулярних до поданої прямої. Зробити рисунок.

Відповідь: утворює; $dim \ L = 1$.

13.2.7. Множина $C[a;b]$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Відповідь: утворює; $dim \ L = \infty$.

13.2.8. Множина $\{f(x) : f(1) = 1\}$.

Відповідь: ні.

13.2.9. Множина діагональних матриць розміром $n \times n$.

Відповідь: утворює; $dim \ L = n$.

13.2.10. Множина матриць $\{A, n \times n, \ detA = 0\}$.

Відповідь: ні.

13.2.11(додаткова). Довести, що множина матриць $n \times n$ з першим рядком (0,...,0) утворює лінійний простір L_1, $dim\ L_1 = n(n-1)$. Множина верхньотрикутних матриць – простір вимірності $\frac{n(n+1)}{2}$. Множина симетричних матриць – простір вимірності $\frac{n(n+1)}{2}$.

13.2.12. Довести, що система $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ лінійно залежна.

13.2.13. Довести, що система функцій $1,\ cos^2 x,\ sin^2 x$ лінійно залежна.

13.2.14. Довести, що система функцій e^x та e^{2x} лінійно незалежна.

13.2.15. Визначити, які з операцій над стовпчиками $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ утворюють скалярний добуток:

а) $(x, y) = x_2 y_1$;

б) $(x, y) = 3x_2 y_1 + 5x_2 y_2$;

в) $(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_1 y_2$.

13.2.16(додаткова). Довести, що у просторі багаточленів степеня ≤ 2 можна утворити скалярний добуток $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2) =$
$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.

13.2.17(додаткова). Нехай у просторі $C[a, b]$ скалярний добуток визначено за правилом $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) g(x) dx$.

1. Довести, що виконуються необхідні властивості.

2. Записати нерівність Коші-Буняковського.

3. Знайти кут між функціями $sin\, x$ та $cos\, x$ у просторі $C[-\pi; \pi]$, а також $(cos\, x,\ cos\, x)$.

4. Довести, що $\int_0^1 \sqrt{(4 + x^3) x} dx < \sqrt{2,125}$.

5. Довести, що багаточлени 1 та x ортогональні на відрізку $[-1; 1]$. Знайти

a_1, a_0, b_2, b_1 **та** b_0 **так, щоб багаточлени** $1,\ x,\ x^2 + a_1x + a_0,\ x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ **утворювали ортогональну систему.**

13.3. Завдання.

Визначити, які з множин утворюють лінійний простір. У випадку позитивної відповіді навести приклад базису (13.3.1 - 13.3.4).

13.3.1. Множина геометричних векторів на площині, паралельних будь-якій прямій.

13.3.2. Множина $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ x_2 = 0 \right\}$.

Відповідь: утворює.

13.3.3. Множина функцій у вигляді $a\cos x + b\sin x$ ($a,\ b$ – **числа).**

13.3.4. Множина багаточленів будь-якого степеня.

Відповідь: утворює.

13.3.5(додаткова). Довести, що функції $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $t \in [-1; 1]$, $n = 0, 1, 2...$ – **багаточлени (так звані багаточлени Чебишева). Довести, що** $T_0,\ T_1$ **ортогональні відносно скалярного добутку**

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Заняття 14
Лінійний оператор та його матриця

14.1. Нехай L_1 та L_2 – лінійні простори. Якщо кожному $x \in L_1$ відповідає за правилом A вектор $y \in L_2$

$$\mathrm{x} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{y}$$

і якщо

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,$$
$$\boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

то A називають лінійним оператором. Якщо розглянути базиси $(e_1, \dots, e_n)$ у L_1 та $(f_1, \dots, f_m)$ у L_2, то можна утворити так звану матрицю лінійного оператора

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$

стовпчик якої утворено з координат векторів $Ae_1, \dots, Ae_n$.

Підкреслимо: якщо $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то

$$\mathrm{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

за правилами добутку матриць.

Якщо замість базису $(e_1, \dots, e_n)$ розглянути інший $(e'_1, \dots, e'_n)$, то в ньому матриця оператора A буде

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},$$

де T – так звана матриця переходу від $(e_1, \dots, e_n)$ до $(e'_1, \dots, e'_n)$, кожен стовпчик якої утворено з координат векторів $e'_1, \dots, e'_n$ у базисі $e_1 \dots e_1$.

14.2. Заняття.

Нехай $L_1 = L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_i \in R \right\}$ – звичайний двовимірний простір. Довести, що A – лінійний оператор, записати його в матрицю, з'ясувати геометричний зміст (14.2.1 -14.2.2).

14.2.1. $A\overrightarrow{x} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

14.2.2. $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Нехай $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$. Довести, що $\boldsymbol{A}$ – лінійний оператор, і записати матрицю в базисі $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ (14.2.3 – 14.2.5):

14.2.3. $A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}$ (λ – стала).

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

14.2.4. $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{a}$ – сталий вектор.

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

14.2.5. $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -5x_1 \\ -3x_3 - x_1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

14.2.6. Нехай $L_1 = L_2 = R^1$, $Ax = 2x + 3$. Чому A не буде лінійним оператором? Чи буде лінійним оператором B : $Bx = x^2$?

14.2.7. Нехай $\mathrm{L}_1 = \mathrm{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-x} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathrm{R}\}$, A діє за правилом: для $f \in \mathrm{P}_n$ $Af = \frac{df}{dx}$. Довести, що A – лінійний оператор, та знайти його матриці в базисах:

а) $1, x, ..., x^n$; б) $1, x-1, (x-1)^2, ..., (x-1)^n$;

в) $1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$.

Відповідь: а),б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

14.2.8(додаткова). Нехай $\mathrm{L} = \{a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t + \dots + a_n\cos nt + b_n\sin nt\}$. **Якщо** $f \in L$, **то** $Af = \frac{df}{dx}$. **Знайти матрицю в базисі** $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$.

14.2.9(додаткова). Нехай L **– множина однорідних багаточленів степеня 2 від двох змінних** x **та** y **. Довести, що вона утворює лінійний простір. Якщо** $p \in L$, **то нехай** $Ap = x\,\frac{\partial p}{\partial y}$. **Знайти матрицю в базисі** x^2, xy, y^2.

14.3. Завдання.

14.3.1. Довести, що перетворення $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ **утворює лінійний оператор. Записати його матрицю в базисі** $\vec{i}$, $\vec{j}$; **з'ясувати геометричний зміст.**

14.3.2. Довести, що $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **утворює лінійний оператор. Записати матрицю, з'ясувати геометричний зміст.**

14.3.3. Нехай $L_1 = L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_i \in R \right\}$, $A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_3 \\ -4x_2 \\ -3x_3 + x_1 \end{pmatrix}$. Довести, що A – лінійний оператор, записати матрицю в базисі $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14.3.4. Нехай $\mathrm{L} = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_i \in R.\}$ і для $f \in L$ $Af = f(x+4)$. Довести, що A – лініний оператор; скласти матрицю в базисі $1,\ x,\ x^2,\ x^3$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \cdot 4^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \cdot 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14.3.5(додаткова). Нехай L – множина матриць розміром 2×2. Якщо $x \in L$, то нехай $AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$. Довести, що A – лінійний оператор, та скласти його матрицю у базисі $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Заняття 15

Власні вектори. Матриця лінійного оператора в базисі з власних векторів

15.1. Відомо, що коли лінійний оператор A задано в деякому базисі матрицею A, то матриця $A-\lambda E$ називається характеристичною матрицею оператора A, відповідною матриці A (тут E – одинична матриця того самого порядку, що й A). Рівняння $|A-\lambda E| = 0$ відносно невідомого λ називається характеристичним рівнянням оператора A. Відомо, що вектор $\overrightarrow{x} \neq 0$, який задовольняє співвідношенню $A\overrightarrow{x} = \lambda_0 \overrightarrow{x}$, де λ_0 – скаляр, називається власним вектором оператора A, а число λ_0 – власним значенням оператора, яке відповідає власному вектору $\overrightarrow{x}$. Відомо також, що власними значеннями оператора A є корені характеристичного рівняння.

Для знаходження власного вектора $\overrightarrow{x}$, який відповідає власному значенню λ, треба розв'язати таку систему лінійних рівнянь:

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

15.2. Заняття.

Знайти характеристичне рівняння, власні значення і власні вектори лінійного оператора A у лінійному просторі L_n, заданого в деякому базисі $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ цього простору матрицею A (15.2.1 -15.2.6).

15.2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 0$; $\overrightarrow{x}_1 = -2\gamma \overrightarrow{e}_1 + \gamma \overrightarrow{e}_2$; $\lambda_2 = 4$; $\overrightarrow{x}_2 = 2\gamma \overrightarrow{e}_1 + \gamma \overrightarrow{e}_2$.

15.2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$; $\overrightarrow{x}_1 = -2\gamma \overrightarrow{e}_1 + \gamma \overrightarrow{e}_2 \lambda_2 = 7$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma \overrightarrow{e}_1 + 2\gamma \overrightarrow{e}_2$.

15.2.3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 3 + 4i$; $\overrightarrow{x}_1 = 2\gamma \overrightarrow{e}_1 - i\gamma \overrightarrow{e}_2$; $\lambda_2 = 3 - 4i$; $\overrightarrow{x}_2 = 2\gamma \overrightarrow{e}_1 + i\gamma \overrightarrow{e}_2$.

15.2.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$, $\overrightarrow{x}_1 = \gamma(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 - 2\overrightarrow{e}_3)$; $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$, $\overrightarrow{x}_2 = \gamma(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3)$; $\boldsymbol{\lambda_3 = 10}$, $\overrightarrow{x}_3 = \gamma(-\overrightarrow{e}_1 + 4\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$.

15.2.5. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$, $\overrightarrow{x}_1 = \gamma(-\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$; $\boldsymbol{\lambda_2 = 6}$, $\overrightarrow{x}_2 = \gamma(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2)$; $\boldsymbol{\lambda_3 = 9}$, $\overrightarrow{x}_3 = \gamma(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$.

15.2.6. $A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2\overrightarrow{f}_2 + \gamma_3\overrightarrow{f}_3$, де $\overrightarrow{f}_2 = (-1; 0; 1)$; $\overrightarrow{f}_3 = (2; 1; 0)$.

15.2.7. Звести матрицю лінійного оператора векторного простору L_3 до діагонального виду. Знайти базис, в якому матриця має діагональний вигляд.

Зауваження. Достатньою умовою для зведення матриці лінійного оператора векторного простору розмірності n є наявність у даного оператора n різних власних значень, причому діагональними елементами будуть ці власні значення.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

15.2.8. Які з наступних матриць лінійних операторів дійсного векторного простору L можна звести до діагонального вигляду за допомогою переходу до нового базису?

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: не зводиться до діагонального вигляду.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: зводиться до діагонального вигляду.

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: не зводиться до діагонального вигляду.

г) $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: зводиться до діагонального вигляду.

д) $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: не зводиться до діагонального вигляду.

15.2.9. Знайти ортонормований базис з власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для лінійного оператора A, заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

15.3. Завдання.

Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A у лінійному просторі $\mathrm{L_n}$, заданого в деякому базисі $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, .., \overrightarrow{e}_n)$ цього простору матрицею A, якщо:

15.3.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 6$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(-3\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(3\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2)$.

15.3.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 7$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(-4\overrightarrow{e}_1 + 5\overrightarrow{e}_2)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2)$.

15.3.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2 + 3i$; $\lambda_2 = 2 - 3i$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(\overrightarrow{e}_1 - i\overrightarrow{e}_2)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(\overrightarrow{e}_1 + i\overrightarrow{e}_2)$.

15.3.4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2)$.

15.3.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(-2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$; $\overrightarrow{x}_3 = \gamma_3 \overrightarrow{e}_1$.

15.3.6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4 + \sqrt{3}$; $\lambda_3 = 4 - \sqrt{3}$; $\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3)$;
$\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(\sqrt{3}\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$; $\overrightarrow{x}_3 = \gamma_3(-\sqrt{3}\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$.

15.3.7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;
$\overrightarrow{x}_1 = \gamma_1(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_3)$; $\overrightarrow{x}_2 = \gamma_2(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$; $\overrightarrow{x}_3 = \gamma_3(\overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3)$.

15.3.8. Звести матрицю лінійного оператора векторного простору L до діагонального вигляду. Знайти базис, в якому матриця має діагональний вигляд.

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15.3.9. Знайти ортонормований базис з власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для лінійного оператора A, заданого в деякому ортонормованому базисі евклідового простору матрицею A, а також записати матрицю переходу від "старого" базису до "нового", якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e'}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e'}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$;
$H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A' = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e'}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e'}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e'}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Заняття 16
Квадратичні форми. Криві другого порядку

16.1. Ознайомитись з теоретичним матеріалом.

16.2.1. Записати матрицю квадратичної форми:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$.

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

16.2.2. Записати квадратичну форму, якщо її матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 22 \\ 2 & -1 & 3 \\ 22 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

16.2.3. а) Чи кожну квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду ортогональним перетворенням?

б) Чи залежать канонічні коефіцієнти квадратичної форми від вибору ортогонального перетворення, яке зводить її до канонічного вигляду?

16.2.4. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням:

а) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

Відповідь: $3\vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2$.

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Відповідь: $4\vec{x}_1^2 + 4\vec{x}_2^2 - 2\vec{x}_3^2$.

в) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

Відповідь: $\vec{x}_1^2 - 2\vec{x}_2^2 + 4\vec{x}_3^2$.

16.2.5. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням, знайти базис, в якому вона має канонічний вигляд, і матрицю цього ортогонального перетворення:

а) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$.

Відповідь: $4\vec{x}_1^2 + 9\vec{x}_2^2$; $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Відповідь: $\vec{x}_1^2 + 4\vec{x}_2^2 - 2\vec{x}_3^2$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

в) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Відповідь: $6\vec{x}_1^2 + 2\vec{x}_2^2 + 3\vec{x}_3^2$; $\overrightarrow{e_1'} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\overrightarrow{e_2'} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\overrightarrow{e_3'} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

16.2.6. Визначити тип кривої та звести рівняння до канонічного вигляду:
а) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$.

Відповідь: парабола; $\vec{y}^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{x} + \sqrt{8}5$.

б) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

Відповідь: еліпс; $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

в) $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$

Відповідь: гіпербола; $a = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}.$

г) $x^2 - 8xy + 7y^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$

Відповідь: гіпербола; $\frac{\tilde{y}^2}{9} - \frac{\tilde{x}^2}{1} = 1$.

д) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$.

Відповідь: крива розпадається на пару прямих, що перетинаються.

16.2.7. При яких значеннях λ квадратична форма

$$5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

буде достатно визначеною?

Відповідь: $\lambda > 2$.

16.3. Завдання.

16.3.1. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням:

а) $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2$.

Відповідь: $5\vec{x}_1^2 - 8\vec{x}_2^2$.

б) $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3$.

Відповідь: $-2\vec{x}_1^2 + 3\vec{x}_2^2 + 6\vec{x}_3^2$.

в) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Відповідь: $-\vec{x}_1^2 - 7\vec{x}_2^2 + 5\vec{x}_3^2$.

16.3.2. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду ортогональним перетворенням, знайти базис, в якому вона має канонічний вигляд і матрицю цього ортогонального перетворення.

а) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$

Відповідь: $4\vec{x}_1^2 + 6\vec{x}_2^2$; $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$

Відповідь: $\boldsymbol{3\vec{x}_1^2 + 2\vec{x}_2^2}$; $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\overrightarrow{e_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\overrightarrow{e_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

в) $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3}$.

Відповідь: $4x_1^2 + 8y_1^2 - 2z_1^2$; $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

16.3.3. Визначити тип кривої та звести рівняння до канонічного вигляду:

а) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

Відповідь: парабола; $\vec{y}^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x}$**.**

б) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$**.**

Відповідь: крива розпадається на пару паралельних прямих: $x + 2y + 1 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$**.**

в) $x^2 + y^2 + 3xy + x + 4y = 0$**.**

Відповідь: $-\frac{5}{2}\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{y}^2 = 1.$

Заняття 17
Поверхні другого порядку у просторі

17.1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом відповідної лекції.

17.2. Заняття.

17.2.1. Визначити назву поверхні та зробити рисунок:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ ( );

б) $x = 2y^2 + z^2$ ( );

в) $1 - z = x^2 + y^2$ ( );

г) $x^2 = y^2 + z^2$;

д) $x^2 - z^2 = 9$.

17.2.2. Написати канонічне рівняння поверхні, зробити рисунок:

$$2x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 4x - 54y - 8z + 86 = 0.$$

Відповідь: еліпсоїд з півосями $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

17.2.3. Користуючись зведенням квадратичної форми до канонічного вигляду, написати канонічні рівняння:

а) $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz = 1$;

б) $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz = 0$;

в) $3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz = -1$.

Звернути увагу на те, що одному з власних значень відповідають два лінійно незалежних власних вектора.

Відповідь: а) однопорожнинний гіперболоїд; б) конус; в) двопорожнинний гіперболоїд.

17.2.4. Написати канонічне рівняння поверхні:
$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0.}$

1) матриця квадратичної форми та її власні значення :

2) власні вектори:

3) матриця $\boldsymbol{H}$ переходу від одного базису до іншого (стовпчики утворені з власних векторів, поділених на довжину):

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} =$$

$=$

4) Підставити у рівняння поверхні вирази $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{z}$ (увага: квадратична форма автоматично набуває вигляду $\lambda_1 \mathrm{x}_1^2 + \lambda_2 \mathrm{y}_1^2 + \lambda_3 \mathrm{z}_1^2$):

5) виділити повні квадрати:

6) остаточний вигляд:

Відповідь: еліптичний циліндр.

17.2.5. Написати канонічне рівняння поверхні:
$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2xz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

Відповідь: еліптичний параболоїд.

17.2.6(додаткова). Дослідити рівняння поверхні $y^2 + 2xz + 2x + 2z + k = 0.$

Відповідь: однопорожнинний гіперболоїд обертання, якщо $k < 2$; конус обертання, якщо $k = 2$; двопорожнинний гіперболоїд обертання, якщо $k > 2$.

17.3. Домашнє завдання.

17.3.1. Написати канонічне рівняння поверхні $3x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + z = 0$; зробити рисунок.

Відповідь: параболоїд обертання.

17.3.2. Написати назву кожної поверхні:

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (   ); $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (   );

рисунок: **рисунок:**

$x^2 - y^2 + z^2 = 0$ (   ); $y = x^2 + z^2$ (   );

рисунок: **рисунок:**

$x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (   ); $x^2 + z^2 = 1$ (   );

рисунок: **рисунок:**

17.3.3. Написати канонічне рівняння поверхні ($\lambda_1 = 10$)

$$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0.$$

17.3.4. Написати канонічне рівняння поверхні:

а) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$;

б) $x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0$; в) $3x^2 + 4xy + 8x + 8y - 4z = 0$.

Відповідь: а) конус; б) конус обертання; в) сідло.

17.3.5. Яку поверхню 2-го порядку описує рівняння

$$x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz = k?$$

Відповідь: гіперболічний циліндр, якщо $k \neq 0$; пару площин, що перетинаються, якщо $k = 0$.

Завдання

1. Визначити тип і розташування кривої.

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 4.$
2. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$
3. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$
4. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$
5. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$
6. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0.$
7. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0.$
8. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0.$
9. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0.$
10. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0.$
11. $11x^2 - 56xy - 22y^2 + 40x + 25 = 0.$
12. $60x^2 + 28xy + 15y^2 + 225y + 32 = 0.$
13. $20x^2 + 8xy + 5y^2 + 15x + 25y + 10 = 0.$
14. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 8x + 12y = 0.$
15. $75x^2 + 11xy + 15y^2 + 2x = 0.$
16. $21x^2 + 20xy + 10x - 12y + 16 = 0.$
17. $7x^2 - 20xy - 14y^2 + 2 = 0.$
18. $5x^2 + 60xy + 16y^2 + 24x + 12y = 0.$
19. $56xy + 33y^2 + 60y - 10 = 0.$
20. $35x^2 - 56xy + 2y^2 + 2x + 2 = 0.$
21. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$
22. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$
23. $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0.$
24. $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0.$
25. $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 68x + 26y + 28 = 0.$
26. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$
27. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$
28. $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$
29. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y - 2 = 0.$
30. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

2. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду.

1. $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz - 24x + 18y - 6z + 30 = 0.$
2. $-2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz - 10yz + 4x - 10y + 2z - 1 = 0.$
3. $-9x^2 - z^2 + 6xz - 50x - 15y + 50z - 100 = 0.$
4. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz + 2x + 2y - 2z = 0.$
5. $x^2 + y^2 + z^2 + xy - zx + zy + 3x - 3y + 3z = 0.$
6. $3z^2 + 4zx + 8x + 8z - 4y = 0.$
7. $-3y^2 + z^2 - 4xy - 4x + 2y + 5 = 0.$
8. $-4x^2 - 4y^2 + z^2 + 10xy + 2x + 2y + 2z + 3 = 0.$
9. $7x^2 - z^2 - 24xy + 2z + 120x = 0.$
10. $x^2 + 2zy + 2y + 2z + 1 = 0.$
11. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 10zx + 20z - 8x + 29 = 0.$
12. $2x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy + 20x + 20y - 10 = 0.$
13. $5x^2 + 5y^2 - z^2 + 8xy + 12x + 24y + 2z + 36 = 0.$
14. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x - 8y + 8z + 6 = 0.$
15. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0.$
16. $6y^2 - 2x^2 + 6z^2 + 4yz + 8y - 4x - 8z + 1 = 0.$
17. $4y^2 + 3x^2 + 2z^2 + 4xy - 4zx + 4y - 2x - 4z - 3 = 0.$
18. $x^2 + 4y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0.$
19. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0.$
20. $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0.$
21. $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy - 4xz + 4yz - 2x + 3y + 5 = 0.$
22. $4x^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 8y + z - 1 = 0.$
23. $-x^2 - y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz + 6yz + 6x - 8z + 3 = 0.$
24. $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0.$
25. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz + 4z + 2x - 2 = 0.$
26. $3x^3 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8xz - 8yz - 2x + 3y + 4 = 0.$
27. $x^2 - 7y^2 + z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + x - 4y + 2 = 0.$
28. $x^2 + y^2 - z^2 - 4xz + 4yz + 6x - 2z + 4 = 0.$
29. $-2x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 4xy + 4yz + 2x + 4y + z - 1 = 0.$
30. $-3x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 2xy + 8xz + 4yz + x - 2y + 3z - 2 = 0.$

Список рекомендованої літератури

1. Вища математика. Основні означення, приклади та задачі: У 2 кн. / Під ред. Г.П. Кулинича. – К.: Либідь, 1994. Кн. 1. – 309 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

3. Сборник задач по линейной алгебре / Под ред. И.В. Проскурякова. – М.: Наука, 1974. – 384 с.

4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : В 3 ч. – М.: Высш. шк., 1980. Ч. 1. – 320 с.

Ірина Вікторівна Брисіна
Олександр Васильович Головченко
Владислав Федорович Деменко
Юрій Олександрович Крашаниця
Олексій Георгійович Ніколаєв
Володимир Сидорович Проценко
Володимир Олексійович Рвачов
Валерій Терентійович Сікульський
Євгенія Павлівна Томілова
Олена Григорівна Ушакова
Володимир Васильович Хоменко

Редактор Л.О. Кузьменко
Коректор Н.М. Сікульська

Зв. план, 2004
Підписано до друку 25.07.2004
Формат 60 х $84^1/_8$. Папір. офс.№2. Офс.друк.
Умовн.-друк. арк. 7,6. Облік.-вид. арк. 8,62. Т.1000 прим.
Замовлення 295. Ціна вільна

Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"
61070, Харків – 70, вул. Чкалова, 17
Друкарня "ХАІ"
61070, Харків – 70, вул. Чкалова, 17