**Практика №6**

**ОДНОКРАТНІ НЕПРЯМІ (ОПОСЕРЕДКОВАНІ) ВИМІРЮВАННЯ**

**Опосередкованими** називають вимірювання, які здійснюють непрямим методом, за яким шукане значення фізичної величини визначають за результатами прямих вимірювань інших фізичних величин, які функціонально пов’язані із шуканою величиною.

**Методика розрахунку** стандартна (незалежно від роду ФВ):

1). Записати функціональну залежність (рівняння зв’язку) величини, що оцінюють опосередковано Z, та величин, які вимірюють прямо W, V, Z (методом безпосередньої оцінки, тобто значения величин, які входять до формули зв’язку, отримують за показаннями приладів)

Y = f (W, V, Z)

В загальному випадку одна або кілька величин-аргументів також можуть бути опосередкованими (тобто обрахованими за попередніми вимірюваннями) або бути фізичними сталими.

2). Визначити оцінку дійсного значення опосередкованої величини $Y\_{вим}$, підставив в формулу виміряні (обраховані) значення аргументів.

3). Визначити абсолютну похибку опосередкованої величини методом часткового диференціювання, при якому по частинам (по черзі) беруть похідні від функції по кожній прямо виміряній ФВ з урахуванням їх абсолютних похибок

$$∆Y = \frac{∂f(W,V,Z)}{∂W}∆W +\frac{∂f(W,V,Z)}{∂V}∆V +\frac{∂f(W,V,Z)}{∂Z}∆Z, $$

де ∂ - символ часткової похідної.

4). Обрахувати (якщо вони невідомі) за метрологічними характеристиками приладів абсолютні похибки прямо виміряних ФВ

$∆ = \pm \frac{γ\_{кл }∙ Х\_{норм}}{100\%}$ або $ ∆ = \pm \frac{δ ∙ Х\_{вим}}{100\%} $.

де Хнорм - нормоване значення (діапазон вимірювання) засобу вимірювання для кожної прямо виміряної величини.

5). Визначити відносну похибку значення опосередкованої величини

$δ = \pm \frac{∆Y}{Y\_{вим}}100\%$.

**Приклад 1.**

Визначити максимальні значення абсолютної та відносної похибок вимірювання опору резистора за допомогою вольтметра і амперметра (рис.1), якщо показання вольтметра класу точності 1,0 з верхнею границею вимірювання 15 В дорівнює 10 В, а миллиамперметра класу точності 1,5 з верхнею границею вимірювання 150 мА склало 100 мА. Внутрішні опори приладів не враховувати.



Рис. 1 - Схема вимірювання падіння напруги на резисторі

**Розв'язання**

Функціональна залежність між прямими вимірюваннями напруги та сили струму і опосередкованою величиною - опором - визначається за законом Ома і має вид



Абсолютну похибку визначимо з урахуванням часткових похідних по кожній виміряній величині:

$$ΔR=\frac{∂R}{∂U}ΔU+\frac{∂R}{∂I}ΔI.$$

Межі абсолютних похибок кожної прямо виміряної величини з урахуванням метрологічних характеристик вимірювальних приладів будуть:





Тоді межі максимальної абсолютної похибки опору



а межі відносної похибки опору

$$δR=\pm \frac{ΔR}{R\_{вим}}⋅100\%=\pm \frac{2,265Ом}{100Ом}⋅100\%=\pm 2,265\%≈\pm 2,3\%.$$

***Якщо потрібно визначити межі похибок (максимальні значення), то значення похибок прямо виміряних величин враховують за модулем (тобто т. ч., щоб отримати найбільше значення з можливих).***

***Якщо потрібно знайти найбільш вірогідне значение похибки, то абсолютні похибки прямо виміряних величин підсумовують алгебраїчно (з урахуванням знаків). Тобто***



Відповідь: R = (100,0 ± 2,3) Ом, δR = ±2,3%.

**Приклад 2.**

Для визначення електричної потужності, яка виділяється в активному опорі, були виміряні: напруга вольтметром класу 1,5 з межею діапазону вимірювання 150 В (відлік 120 В) і значення опору навантаження 20 Ом за допомогою одинарного мосту з відносною похибкою ± 0,2%. Визначити значення потужності на опорі і максимальні значення її абсолютної та відносної похибок. Внутрішні опори приладів не враховувати.

 V: γкл = 1,5 1) Визначимо оцінку дійсного значення опосередкованої

Uнорм = 150 В величини

Uвим = 120 В $P= \frac{U^{2}}{R}$ = $\frac{U\_{вим}^{2}}{R\_{н}}=\frac{120^{2}}{20}$ = $\frac{14400 В^{2}}{20 Ом}= 720 Вт $

міст: δм = ± 0,2% 2) Обрахуємо абсолютну похибку шуканої величини

 Rн = 20 Ом $∆P = \frac{∂(\frac{U^{2}}{R})}{∂U} ∆U + \frac{∂(\frac{U^{2}}{R})}{∂R}∆R = \frac{\frac{1}{R} ∂(U^{2})}{∂U}∆U+\frac{U^{2}∂(\frac{1}{R})}{∂R}∆R=$

Р - ? ΔР - ? δР-? $= \frac{1}{R}$ 2UΔU + U2 (-$ \frac{1}{R^{2}})$ΔR

3) Визначимо абсолютні похибки напруги та опору:

3.1) Абсолютну похибку напруги визначимо за метрологічними характе-ристиками вольтметра

$$γ\_{кл}= \pm \frac{∆U}{U\_{норм}}100\% \rightarrow ∆U=\pm \frac{γ\_{кл}∙U\_{норм}}{100\%}=\pm \frac{1,5\% ∙ 150B}{100\%}= \pm 2,25 B$$

3.2) Абсолютну похибку опору навантаження визначимо за характеристикою вимірювального одинарного мосту

$$δ\_{м}=\pm \frac{∆}{R\_{н}}100\% \rightarrow ∆=∆R= \pm \frac{δ\_{м}∙ R\_{н}}{100\%} = \pm \frac{0,2\% ∙ 20 Ом}{100\%}= \pm 0,04 Ом$$

Тепер підставимо дані в 2) і знайдемо вірогідне і максимальне значення абсолютної похибки опосередкованої величини

$вірогідне: ∆P= \frac{1}{R}$ 2UΔU + U2 (-$ \frac{1}{R^{2}})$ΔR = ($\frac{2 ∙ 120 В}{20 Ом} 2,25 В -\frac{120^{2}В^{2}}{-R^{2}Ом^{2}}0,04Ом)=$

$=(27\frac{В^{2}}{Ом}-1,44\frac{В^{2}}{Ом})=25,56 Вт$;

максимальне:$\pm ∆P=\pm ( \frac{1}{R}$2UΔU ˗ U2(-$ \frac{1}{R^{2}})$ΔR) = $\pm $ ($\frac{2 ∙ 120 В}{20 Ом} 2,25 В+\frac{120^{2}В^{2}}{R^{2}Ом^{2}}0,04Ом)==\pm 28,44Вт.$

1. Обрахуємо максимальне значення відносної похибки потужності

$$δP=\pm \frac{∆P}{P}100\%=\pm \frac{28,44Вт}{720Вт}100\%=\pm 3,95\%≈\pm 4,0\%$$

Запишемо результат вимірювання у вигляді P = Pвим ± ΔР, δР

Р = 720,0 Вт ± 28,4 Вт, δР = ±4,0%.

**Ускладнемо задачу.** Припустимо, що вольтметр має внутрішній опір, який дорівнює 30,00 кОм ± 0,05 кОм.

**Розв’язання**

Внутрішній опір вольтметра має бути врахований як опір, який паралельно підключений до опору навантаження.

Тоді оцінка дійсного значення потужності буде

$$P= \frac{U^{2}}{R\_{еквівал}}= \frac{U^{2}}{R\_{∥}} =\frac{U^{2}}{\frac{R\_{Н}⋅R\_{V}}{R\_{Н}+R\_{V}}} =U\_{вим}^{2}\frac{R\_{Н}+R\_{V}}{R\_{Н}∙R\_{V}}=120^{2}В^{2}\frac{(20+30000) Ом}{(20⋅30000)Ом} ≈720,48Вт$$

Визначимоабсолютну похибку опосередкованої величини - потужності

а) максимальну похибку:

$$∆Р= \pm \left(\frac{∂\left(U^{2}\frac{R\_{Н}+R\_{V}}{R\_{Н}∙R\_{V}}\right)}{∂U}∆U+\frac{∂\left(U^{2}\frac{R\_{Н}+R\_{V}}{R\_{Н}∙R\_{V}}\right)}{∂R\_{Н}}∆R\_{Н}+\frac{∂\left(U^{2}\frac{R\_{Н}+R\_{V}}{R\_{Н}∙R\_{V}}\right)}{∂R\_{V}}∆R\_{V}\right)= $$

$$=\pm \left(\frac{R\_{Н}+R\_{V}}{R\_{Н}∙R\_{V}}2U∆U -\frac{U^{2}}{R\_{V}}\frac{1+R\_{V}}{R\_{H}^{2}}∆R\_{Н}-\frac{U^{2}}{R\_{H}}\frac{R\_{Н}+1}{R\_{V}^{2}}∆R\_{V}\right)==\pm \left(\frac{20 Ом+30000 Ом}{20 Ом∙30000 Ом}∙2∙120 В∙2,25 В+\frac{120^{2 }В^{2 }}{30000 Ом}∙\frac{\left(1+30000\right)Ом}{20^{2} Ом^{2 }}∙0,04 Ом +\frac{120^{2} В^{2}}{20 Ом}∙\frac{\left(20+1\right)Ом}{30000^{2} Ом^{2}}∙0,05 Ом\right)== \pm \left(0,00016+3,0001+0,00000252\right) = \pm 3,00026252 Вт≈\pm 3,0Вт$$

б) вірогідну похибку:

ΔР = ±$\left(0,00016-3,0001-0,00000252\right) = \pm 2,99994252 Вт≈\pm 3,0Вт$

Відносна похибка: δмакс = ±(3,00 Вт / 720,48 Вт) 100% = ± 0,416389 % ≈ ±0,42%,

 δвір = ±(2,9999 Вт / 720,48 Вт) 100% = ± 0,416375 % ≈ ±0,42%.

Запишемо результат вимірювання у вигляді P = Pвим ± ΔР, δР

Рмакс = Рвір = 720,5 Вт ± 3,0 Вт, δР = ±0,4 %.

**Приклад 3.**

Визначити результат вимірювання напруги **Uх** на ланці кола ***ав*** (рис. 2), яка складається з послідовно з’єднаних міліамперметра **мА,** резистора **R** та стабілітро-на **VD**, а також абсолютну і відносну похибки результату вимірювання. Відомі параметри кола:

а) міліамперметр **мА** класу точності **0,5** з межею вимірювання **15 мА** і вну-трішнім опором **RА  = (1,80 ± 0,03) Ом**, **Iвим = 12 мА**;

б) опір резистора **R** **= (150 ± 1) Ом**;

в) стабілітрон **VD** з напругою стабілізації **Uст****= (9,50 ± 0,02) В.**

 **RА**  **R VD**

 ***а*** **мА *в***

 **Uх**

Рис. 2.

**Розв’язання**

1). Запишемо функціональну залежність: Uх = I (RА + R) + Uст.

Визначимо оцінку дійсного значення напруги на ланці *ав:*

Uх = Iвим (RА + R) + Uст  = 12·10-3 А (1,8 + 150) Ом + 9,5 В = 11,3216 В ≈ 11,3 В

2). Визначимо абсолютну похибку опосередкованої величини

$ΔUх =\pm \left(\frac{∂(I (R\_{A} + R) + Uст)}{∂I}∆I+\frac{∂(I (R\_{A} + R) + Uст)}{∂R\_{A}}∆R\_{A}+\frac{∂(I (R\_{A} + R) + Uст)}{∂R}∆R+\frac{∂(I (R\_{A} + R) + Uст}{∂Uст}∆Uст\right)=\pm \left(\frac{(R\_{A} + R) ∂I +0}{∂I}∆I+\frac{I∙∂ (R\_{A} ) + 0+0}{∂R\_{A}}∆R\_{A}+ \frac{I ∂( R) + 0 + 0)}{∂R}∆R+ +\frac{∂Uст}{∂Uст}∆Uст\right)=\pm ((R\_{A} + R)∙1∙∆I +I∙1∙∆R\_{A}+I∙1∙∆R+1∙∆Uст)$

3). Визначимо абсолютні похибки величин-аргументів

$$∆I = \pm \frac{γ\_{кл} ∙\_{ }I\_{норм}}{100\%} =\pm \frac{0,5\%∙15 мА}{100\%}= \pm 7,5∙10^{-5}А = \pm 0,75 мкА,$$

а абсолютні похибки інших аргументів відомі:

$$∆R\_{A}=\pm 0,03 Ом, ∆R = \pm 1Ом, ∆Uст =\pm 0,02 В. $$

Тоді межі абсолютної похибки напруги

$$ΔUх = \pm ((1,8 + 150)Ом∙0,75∙10^{-6}А+12∙10^{-3}А∙0,03 Ом+12∙10^{-3}А∙$$

$$∙1 Ом+0,02 В)= \pm (0,00011385 +0,00036 +0,012 + 0,02)В= =\pm 0,03247385 В ≈\pm 0,03 В $$

4). Відносна похибка буде

$δU\_{X}=\pm \frac{ΔUх}{Uх}100\%= \pm \frac{0,03247385 B}{11,3216 В}100\% =\pm 0,2868309\%≈\pm 0,3\%$ .

Запишемо результат вимірювання: Uх = (11,32 ± 0,03) В, $δU\_{X}$ = ± 0,3 %.

**Задачі для самостійної роботи**

**Гр. 318**

1. Визначити оцінку дійсного значення потужності, яка розсіюється на резис-торі, її максимальні абсолютну і відносну похибки, якщо омметром класу точнос-ті 0,5/1,0 в діапазоні вимірювання 0…100 Ом отримано значення **Rвим = 62,15 Ом**, а падіння напруги на цьому резисторові виміряно вольтметром класу точності 1,5 з верхнею границею вимірювання 30 В і дорівнює **Uвим****= 22 В**.

2. Опір **Rх** складається з трьох послідовно з'єднаних резисторів, які мають такі значення опорів: **R1****= (220 ± 10) Ом; R2 = (352 ± 2) Ом; R3 = (50,5 ± 0,5) Ом**. Оцінити дійсне значення опору **Rх** та його максимальну похибку в абсолютній і відносній формі.

**Гр. 319**

1. Визначити оцінку дійсного значення, абсолютну і відносну похибки результату вимірювання опору резистора, що був виміряний методом амперметра – вольтметра в нормальних умовах, якщо показання амперметра класу точності 2,5 з верхньою границею діапазона вимірювання 50 мА отримали 42,5 А, а показання вольтметра класу точності 0,5/1,0 і границею діапазона вимірювання 15 В склало 12,2 В. Внутрішні опори приладів не враховувати.

2. Вимірювання опору **Rx** (**Rx** як функція від 3-х аргументів **Rx = f(R1, R2, R3)**) здійснювали за допомогою одинарного мосту постійного струму, в якому при умові рівноваги  отримали такі результати: **R1вим****= (100,000,05) Ом, R2вим = (220,000,06) Ом, R3вим = (110,000,04) Ом**. Визначити опір резистора **Rх** і можливі найбільші абсолютну та відносну похибки вимірювання **Rx** .

**Гр. 319а**

1. Визначити оцінку дійсного значення, абсолютну і вдносну похибки результату вимірювання опору резистора, що був виміряний методом амперметра – вольтметра в нормальних умовах, якщо показання амперметра класу точності 2,5/1,5 з верхньою границею діапазона вимірювання 20 мА отримали 12,8 А, а показання вольтметра класу точності 1,5 з верхньою границею діапазона вимірю-вання 10 В склало 9,4 В. Врахувати внутрішній опір приладів: амперметра 5,5 Ом, а вольтметра 95 кОм.

2. Вимірювання опору **Rx** здійснювали за допомогою одинарного мосту постійного струму, в якому при умові рівноваги  отримали такі результати: **R1вим****= (85,20,4) Ом, R2вим = (122,00,5) Ом, R3вим = (42,60,2) Ом**. Визначити опір резистора **Rх** і можливі найбільші абсолютну та відносну похибки вимірювання **Rx** .

**Гр. 310**

1. Опір резистора **Rx** виміряно методом заміщення з почерговим вимірюван-ням падіння напруги на двох послідовно з'єднаних резисторах **Rх**  і **Rет**  за допо-могою потенціометра типу ППТВ-1 (рис. 1) і отримано наступні результати вимірювань: **Ux****= 0,85664 В**, **Uет****= 0,85676 В**.

 Еталоний резистор має номінальне значення **Rет.ном****= 100 Ом** класу точності 0,01. Межі абсолютної похибки вимірювання напруги потенціометром визнача-ються за формулою **ΔU = ± (300·Uизм + 4·Uном)·10-6** В, де **Uвим**– виміряне значення напруги, а **Uном****= 2 В** – верхня межа діапазону вимірювання потенціометра. Внутрішній опір джерела напруги **Е** не враховувати.

Визначити оцінку дійсного значення опору резистора **Rx** і найбільшу похибку результату вимірювання (абсолютну і вдносну).

 Е

 **Rх Rет**

 **Uх Uет**

Рис. 1

2. Визначити потужність, яка розсіюється на резисторі, її максимальні абсо-лютну і відносну похибки, якщо омметром класу точності **2,0** на верхній границі діапазону вимірювання **100 Ом** отримали **Rвим = 54,6 Ом**, а падіння напруги на цьому резисторі виміряно вольтметром класу точності **1,5/1,0** з діапазоном вимірювання **-30 В…+ 30 В** і дорівнює **Uвим****= 24 В**.

**Гр.311**

1. Значення опору однозначної міри - котушки опору - виміряно за допомо-гою потенціометра (див. рис. 1). Показання потенціометра при підключенні до **Rx** було **Ux****= 1,01256 В**, а до **RЭ**– **Uет = 0,99365 В**.

Визначити опір котушки **Rx** та її можливу максимальну похибку вимірюван-ня, якщо номінальне значення опору еталонного резистора є **Rет. ном = 100 Ом**, його класс точности 0,01%, а межі абсолютної похибки потенцометра визначають за формулою: **ΔU = ± (4,8 + 30·Ux)·10-6****В**.

2. Опір **Rx** виміряно за допомогою чотириплечого моста і розраховується за формулою  Визначити результат вимірювання, його абсолютну і від-носну похибки, якщо: **R2 = (85±5) Ом, R3 = (1250±15) Ом, R4** = **(510,5 ± 0,8) кОм.**

**Гр. 312**

1. Значення опору **Rx** виконано методом звірення з еталонним опором **Rет** за допомогою потенціометра постійного струму (див. рис. 1). Номінальне значення еталонного резистора **Rет ном = 100 Ом** і клас точності 0,01 відомі. Виміряні значен-ня: **Uет = 1,03656 В** та **Ux****= 1,53756 В**. Межа абсолютної похибки вимірювання напруги потенціометра визначається за формулою: **ΔUх = ± (4·Uизм + 10) ·10-6** **В**. Визначити опір резистора **Rx**, абсолютну і відносну похибки його вимірювання.

2. Для вимірювання опору **Rx** застосовують резистори з номінальнимі значен-нями: **R0 = 350 Ом; R2 = 100 Ом; R3 = 560 Ом; R4 = 500 Ом**. Класи точності резисто-рів (відповідно): **0,3%; 0,1%; 0,5%; 0,5%**. Визначити оцінку дійсного значення **Rx**, межі абсолютної і відносної похибок опору **Rx***,*якщо 