Градієнт, дивергенція, ротор — три вершники векторного аналізу

Вступ

Векторний аналіз за обов'язком своєї служби працює з *полями*, але не злаковими, а особливими – *скалярними* та *векторними* . **Скалярне поле** - це простір, де у кожній точці відоме число (скаляр). Векторне поле відрізняється від скалярного тим, що у кожній точці відомий вектор. Скалярні та векторні поля – робочі простори для фізичних теорій.

Скалярним полем буде будь-який рельєф місцевості. У кожній точці ми можемо дізнатися число - висоту точки рівня моря. Це двовимірне поле, тому що точки, в яких ми хочемо дізнатися висоту, знаходяться на площині.

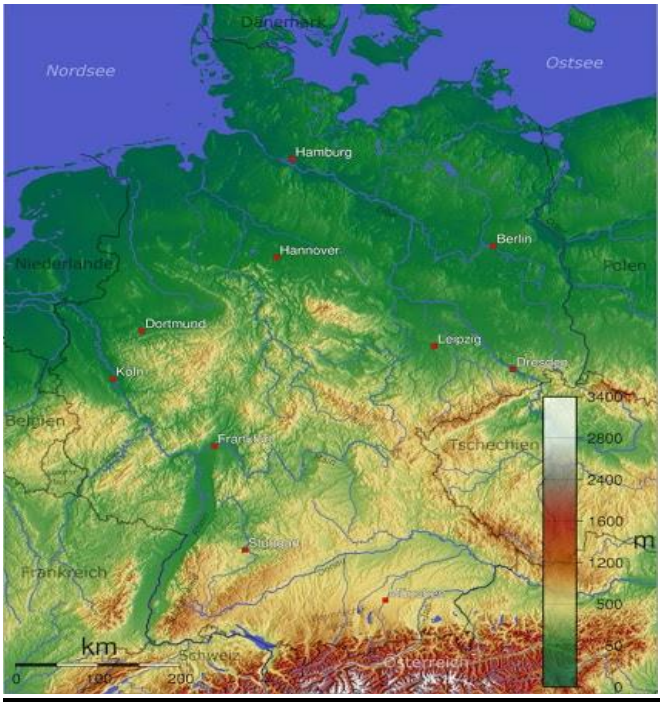


Рисунок 1.1 – Кольором ми позначаэмо висоту

Векторним полем користуються фізики, у тому числі в гідродинаміці. У кожній точці повітряного (або водного) потоку ми знаємо швидкість частинки повітря у цей час. Швидкість — величина векторна: важливо знати її величину, і напрям. Стрілки-вектори показують напрямок течії повітря (або рідини). Це тривимірне поле.

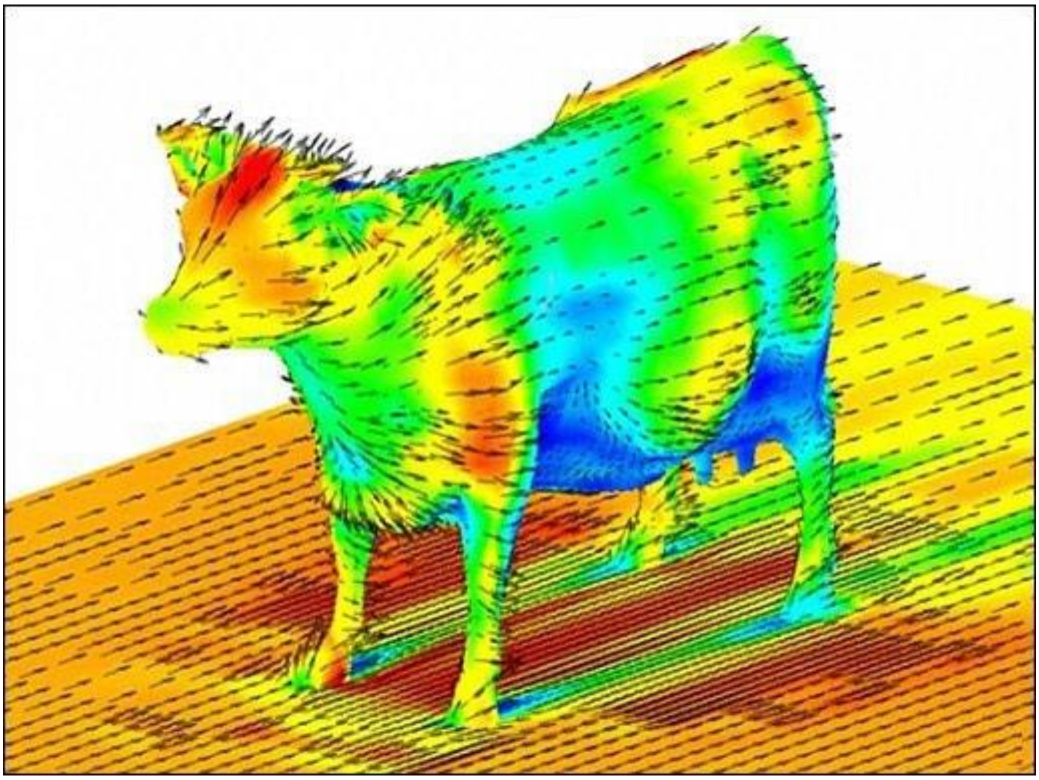


Рисунок 1.2 – Моделювання аеродинамічного обтікання корови

Вивчати фізичні поля важко, оскільки розрахунки необхідно проводити у системі координат. Згадайте, що швидкість тіла залежить від швидкості спостерігача, а величини різних компонентів – від напрямку координатних осей. Вибір систем координат накладає відбиток на розрахунки.

Градієнт

Почнемо з найпростішого – з операції «градієнт». Ця операція застосовується до скалярного полю, а в результаті дає векторне поле. Нехай наше поле A. Тоді ця операція позначається grad(A) або навіть просто gradA.

$$\underline{\boxed{\frac{\partial A}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e_z}}}$$

Рисунок 1.3 – Градієнт полю A

Беремо поле А. Беремо від нього похідні по x-координаті, y-координаті та z-координаті. Потім кожну похідну домножуємо на одиничний вектор, що відповідає потрібній осі. Три вектори, що вийшли, — складаємо. У будь-якої нормальної людини постає питання – навіщо, а головне – для чого? Тезово перерахуємо, чим гарна саме ця комбінація похідних та Орт.

Орт — это вектор, имеющий единичную длину и направленный вдоль координатной оси.

1)**Це – інваріант**. Тобто, результат не залежить від того, в якій системі координат ми працюємо. Grad(A) — векторне поле, тобто безліч стрілок із довжиною та напрямком. Якщо ми змінюватимемо систему координат, самі стрілки не зміняться. Зміняться координати цих стрілок у новій системі координат, але тут нічого не зробити. Але повторю ще раз: вектори, як об'єкти, залишаться незмінними.

2) У кожній точці **grad(A)** показує напрямок найбільшого зростання поля А. Пояснюю. Уявіть собі гору. Ми вже казали, що поверхня — це скалярне поле, адже кожній точці Землі відповідає величина, яка називається висотою місцевості. Для простоти можна сказати, що Земля плоска. Сміятися не треба, то справді легше уявляти.

Рисунок 1.4 – Гора

Отже, **гора - це скалярне поле висот**, назвемо його знову А. Нехай ми стоїмо в якійсь точці на схилі гори. Тепер кожній точці гори відповідає якась стрілка. Виявляється, що у кожній точці гори ця стрілка вказує напрям, у якому гора найшвидше змінює висоту . На картинці я для кількох характерних точок показав ті самі стрілочки. Довжина векторів це не випадковий параметр і моє бачення перспективи, вона теж має сенс.

3) **Модуль градієнта в кожній точці пропорційний швидкості зміни поля А у напрямку, куди цей градієнт спрямований.** Тому, наприклад, ліва нижня стрілка — довга, там урвища, швидка зміна висоти. Стрілки на схилах дальньої гори — менші, адже там, зважаючи на все, висота змінюється плавніше. На гребінці ж стрілки зовсім маленькі, бо там перепад висот малий. Давайте "на пальцях" зрозуміємо останні два пункти.

Що є похідна поля А по осі x у цій точці? Це швидкість зміни цього поля у напрямку осі x. Якщо домножимо на відповідний осі вектор, то отримаємо стрілку, яка паралельна осі x і довжина якої пропорційна швидкості зміни поля вздовж цієї осі. Виходить, що, векторним чином склавши три таких вектори, ми отримаємо вектор, який несе в собі інформацію про зміну вздовж кожної осі, і більше того, він дивиться рівно туди, де поле А зазнає найшвидших змін.

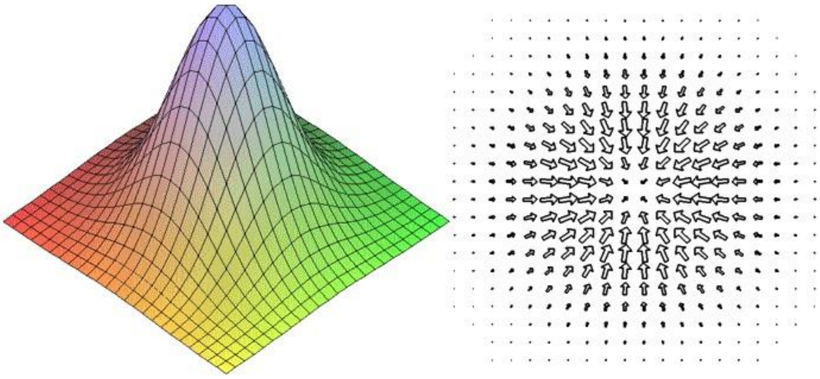


Рисунок 1.5 – Операція градієнта перетворює пагорб (ліворуч), якщо дивитися на нього зверху, у полі векторів (праворуч). Видно, що вектори спрямовані «в гору» і чим довше, тим крутіше нахил.

Операція градієнта виявляється корисною для запису багатьох фізичних законів або подання рівнянь, що пов'язують величини. Наприклад, для електростатичного поля, яке характеризується силовою характеристикою – напруженістю **E** та енергетичною характеристикою – потенціалом φ, справедливо:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi$$

Рисунок 1.6

Тобто вектор напруженості **E** спрямований туди, де потенціал змінюється найкрутіше. Модуль **E** тим більше, чим швидше цей потенціал змінюється. Якщо сила **F** — консервативна сила (наприклад, сила тяжіння), то сила, що діє на тіло, і потенційна енергія тіла U пов'язані схожим чином:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U$$

Рисунок 1.7

«Прочитання» цієї формули таке саме, як і в попередньої. Наприклад, усі знають, що потенційна енергія тіла у гравітаційному полі поблизу поверхні Землі – це ем-же-аш. Виходить, що потенціал U змінюється лише за висотою, причому росте він нагору. Значить, градієнт теж спрямований нагору, а сила через мінус у формулі — вниз.

Дивергенція

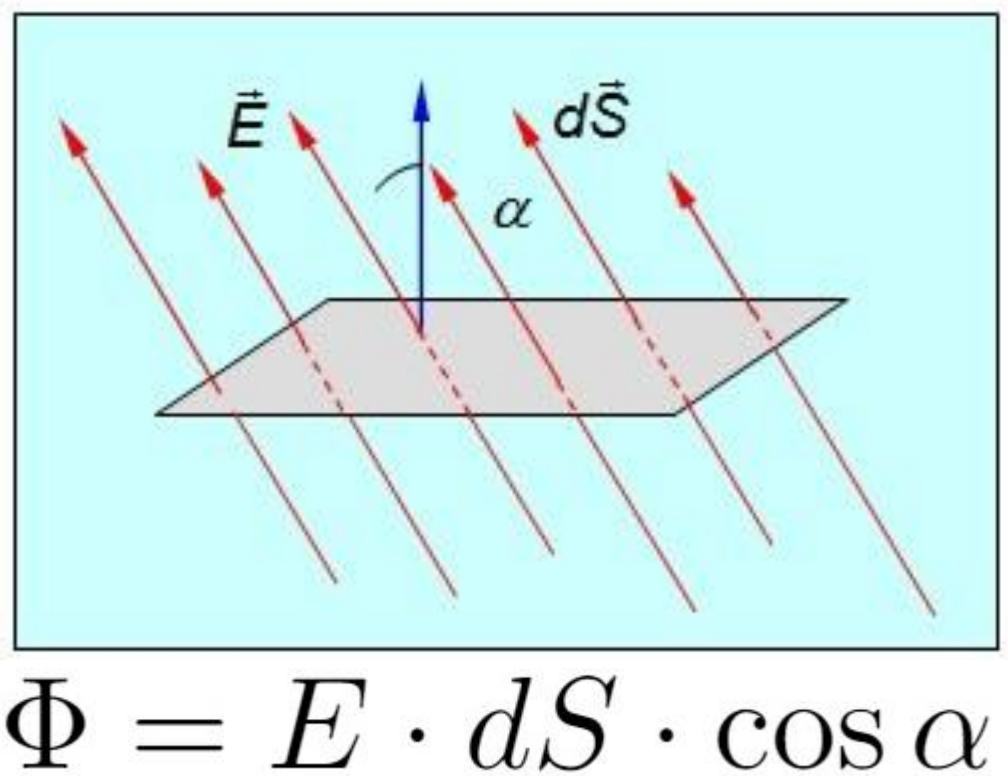
Перша операція, яка здійснює перетворення векторного поля на скалярне. Можна уявити машинку, яка переводить стрілочки в числа.

Порахувати дивергенцію просто: необхідно взяти похідну іксової компоненти x, ігрову y, зетову z, а потім все скласти.

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Рисунок 1.8 – Позначення та спосіб порахувати дивергенцію. Зазначимо, що тут задіяно три похідні із дев'яти

1) **Результат обчислень не залежатиме від системи координат.** Окремі похідні змінюватимуться при зміні системи координат, але все так підлаштовано, що результат не зміниться. Фізичний зміст ми вважаємо за необхідне пояснити більш детально, ніж у попередній операції. Введемо нову сутність – *потік векторного поля* через майданчик.



$$\Phi = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

Рисунко 1.9 – Потік вектора **E** через майданчик площею dS та спосіб його порахувати

Чому ж ця величина називається потоком? Повернемося до нашої водної аналогії, де векторне поле є безліччю швидкостей точок рідини. Ці стрілочки вказують напрямок течій. Уявіть, що ми обзавелися плоскою рамкою, яка вимірює об'єм рідини, що пройде через себе, за одиницю часу. Цей обсяг буде тим більшим, чим більша швидкість рідини і площа рамки. Також подбаємо, щоб у нашої рамки був визначений одиничний перпендикуляр до площини з напрямком (такий вектор називається *нормаллю*), який фіксував би:

1. Орієнтацію рамки щодо напряму течії. Чим сильніший напрямок нормалі збігається з течією, тим більше рідини протікає через рамку (тим більша «ефективна» площа);
2. Назовні чи всередину втікає рідина **?** Домовимося, що за напрямком нормалі — назовні.

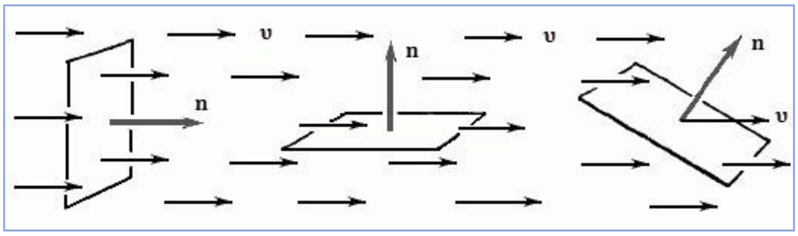


Рисунок 1.10

Тепер візьмемо замкнуту поверхню, яку розділимо на кінцеву чи нескінченну кількість таких рамок-майданчиків із нормалями, що стирчать назовні.

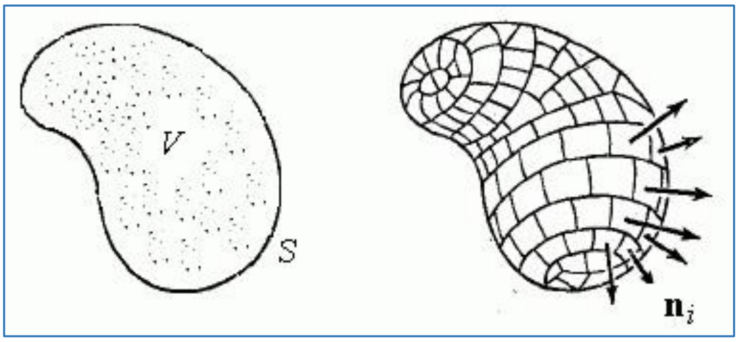


Рисунок 1.11

Занурimo цю поверхню у векторне поле і змусимо заміряти об'єми рідини, що втікає і витікає. Оскільки рідина в нас вважається несжимаемой, ми очікуємо, що потік несжимаемой рідини через замкнуту поверхню дорівнюватиме нулю. Скільки витікає, стільки й витікає. А якщо витікає більше, ніж витікає? Значить, усередині області знаходяться точки, які витрачають рідину.

2) **Дивергенція характеризує щільність джерел поля у цій точці.**

Наведемо кілька прикладів з класики.

Силові лінії електростатичного поля завжди незамкнені: починаються на позитивних зарядах (або нескінченності) і закінчуються на негативних зарядах (або нескінченності).

Перекладаючи розумною мовою: джерелами електростатичного поля є позитивні заряди, а стоками — негативні. З цього пишеться рівняння Максвелла, яке стверджує, що джерелами електричного поля є лише електричні заряди.

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Рисунок 1.12 – Епсилон нульовий тут потрібно просто для розмірності в СІ

Це рівняння слід читати так. Кожна точка простору виточує кількість поля **E** , пропорційне щільності заряду в цій точці.

Магнітні силові лінії ніде не починаються та не закінчуються. Такі поля називаються вихровими.

Ротор

Ротор - це операція, яка переводить векторне поле в інше векторне поле. Як його рахувати і навіщо він потрібний — давайте розбиратися.

Ротор векторного поля **A** є за визначенням такий страшний вираз:

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \cdot \vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \cdot \vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \cdot \vec{e_z}$$

Рисунок 1.13 – Зверніть увагу, що тут беруть участь інші шість похідних, які не брали участь у дивергенції

У цьому визначенні насправді є закономірність, її легко побачити, якщо прийти до поняття ротора щодо криволінійних інтегралів, а саме — формули Стокса . Ми ж зараз не про це, тому я розповім про альтернативний шлях, яким можна прийти до ротора.

Оператор набла

Що таке вектор? Вектор – це три числа, з якими можна щось робити. Наприклад, (1; -2; 1.5) - це вектор, треба тільки йому дозволити за певними правилами складатися з іншими векторами і множитись на числа. А давайте прикол покажу. Зараз зробимо курений вектор, такий, що в координатах у нього стоять не числа, а *операції:*

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e_z}$$

Рисунок 1.14 – Перевернутий трикутник і називається "набла".

По кожній з координат ми поставили операцію (або *оператор*) диференціювання за цією координатою. Ну а що? Чи можна такий вектор скласти з іншим? - Можна, можливо. Чи можна помножити на число? - можна, можливо. *Векторний оператор,* що офіційно вийшов, називається «оператор Гамільтона», але всі його називають «наблою». Цей дивний на перший погляд об'єкт придатний для запису складних векторних операцій. Дивіться, якщо наблой подіяти на скалярне поле A, вийде градієнт:

$$\vec{\nabla} A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{e_z} = \mathrm{grad} A$$

Рисунок 1.15

Якщо їм *скалярно* вплинути на векторне поле, виходить дивергенція цього поля. Ми начебто скалярно множимо два вектори:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{A}$$

Рисунок 1.16

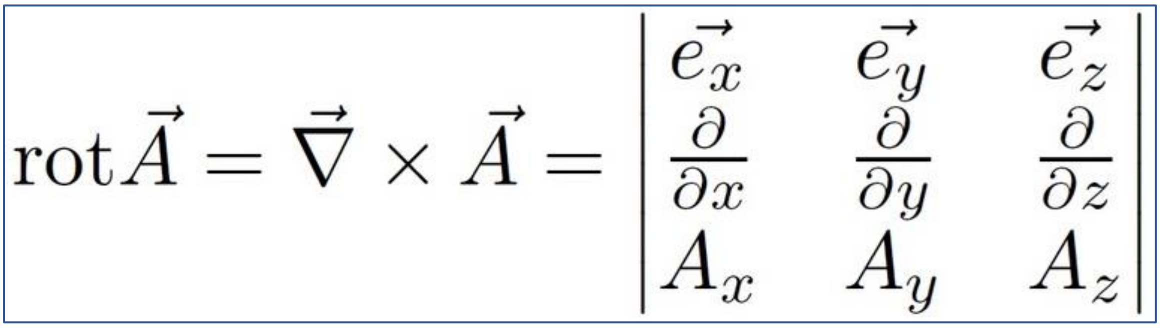
Ну раз ми скалярно помножили наблу на **A** і отримали щось цікаве, давайте подивимося, що буде, якщо зробити векторне множення. Нагадую, що векторний добуток двох векторів **A** і **B** це така штуковина:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \cdot \vec{e_x} - (A_x B_z - A_z B_x) \cdot \vec{e_y} + (A_x B_y - A_y B_x) \cdot \vec{e_z}$$

Рисунок 1.17

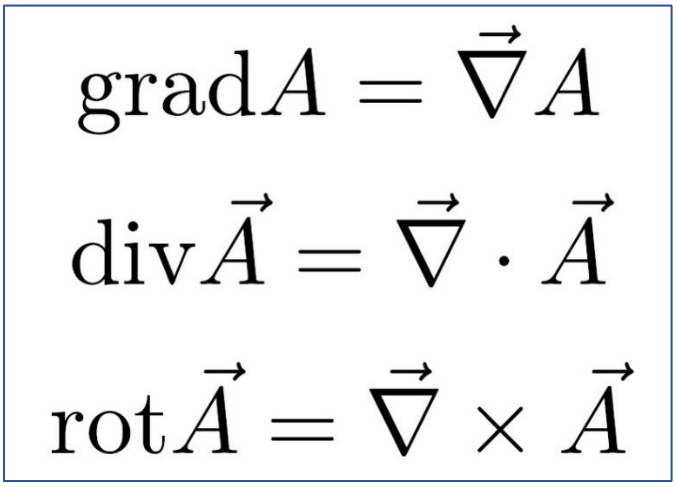
Оп-па. Так якщо помножити набл *векторно* на векторне поле **A,** вийде точно те, що ми написали в першому визначенні ротора!



$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Рисунок 1.18

Ось для цього ми і вводили оператор набла. З його допомогою стає зрозуміло, що ротор - це логічне продовження ідей дивергенції та градієнта:



$$\mathrm{grad}A = \vec{\nabla} A$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Рисунок 1.19

Фізичний зміст ротора.

Повернімося до рідної водної аналогії. Але якщо минулого разу у нас була помічником рамка-лічильник на воду, то цього разу ми купимо у квітковому магазині замкнуту тонку гумову трубку. Наскільки тонку? Рівно настільки, щоб зміни векторів у поперечнику були несуттєвими. Виберемо для розгляду шматок простору нашої рідини.

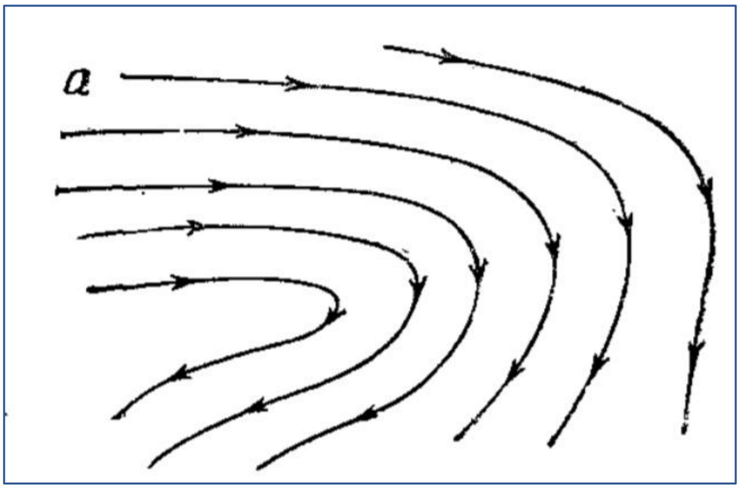


Рисунок 1.20

Потім помістимо в шматок рідини нашу трубку (поки ми її не матеріалізували).

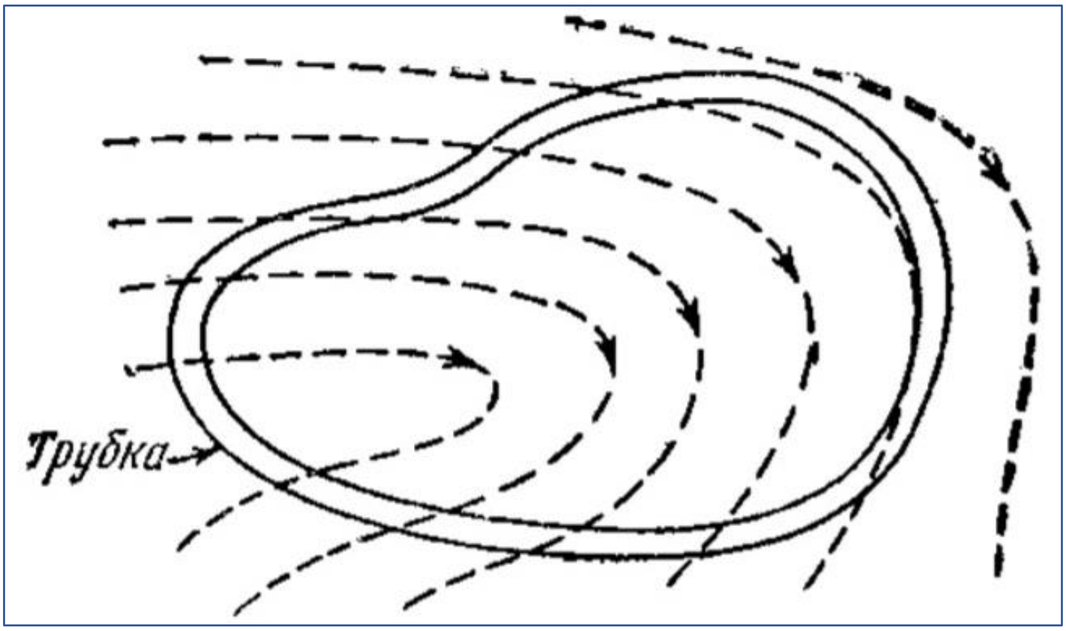


Рисунок 1.21

А тепер несподівано заморозимо всю рідину в просторі, крім вмісту трубки. Рідина у трубці почне циркулювати. Нас буде цікавити швидкість руху, що встановився, з урахуванням напрямку циркуляції. Домовимося, що позитивний напрямок проти годинникової стрілки (на малюнку швидкість течії негативна).

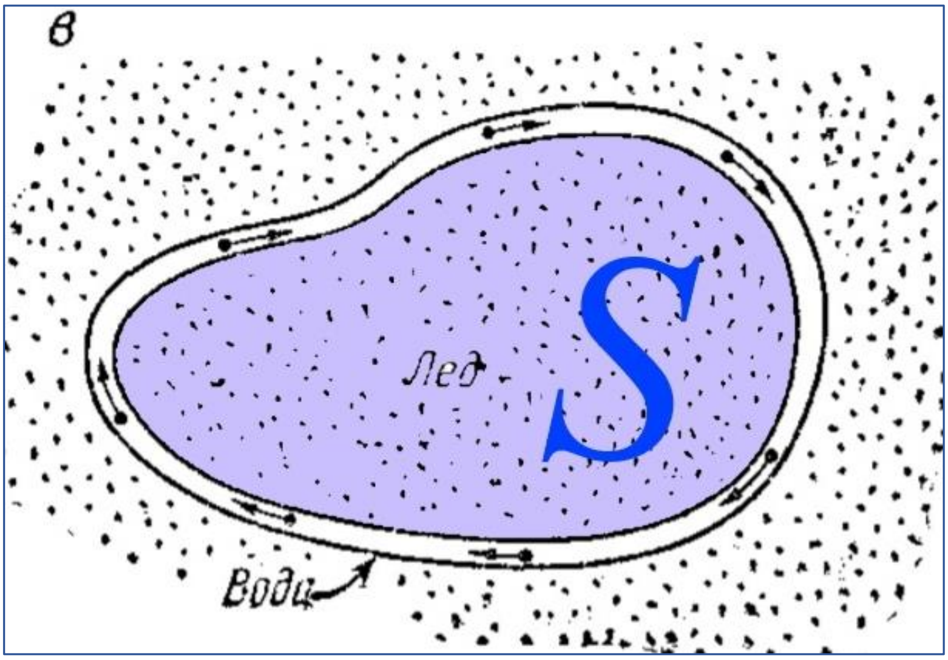


Рисунок 1.22

Швидкість течії складається з імпульсів рідини, що штовхають її в позитивному та негативному напрямках вздовж трубки. Добуток підсумкової швидкості на довжину трубки ми назвемо *циркуляцією векторного поля* . Ця величина показує, наскільки узгоджено і активно векторне поле змушує циркулювати рідину вздовж замкнутої кривої.

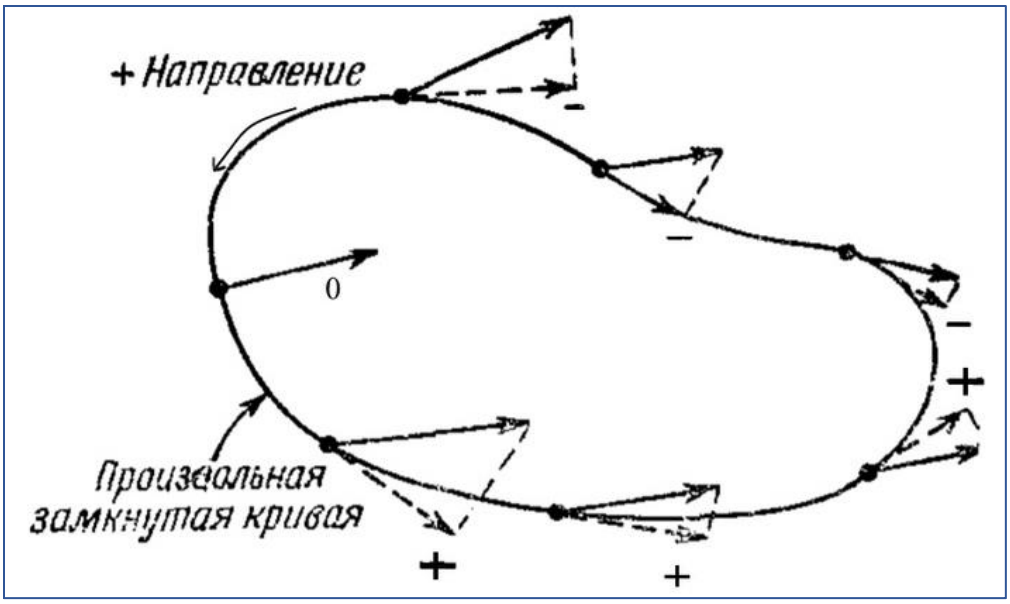


Рисунок 1.23

Обчислимо відношення циркуляції до площі, що охоплюється трубкою. Це підготовка до обчислення ротора недоротор.

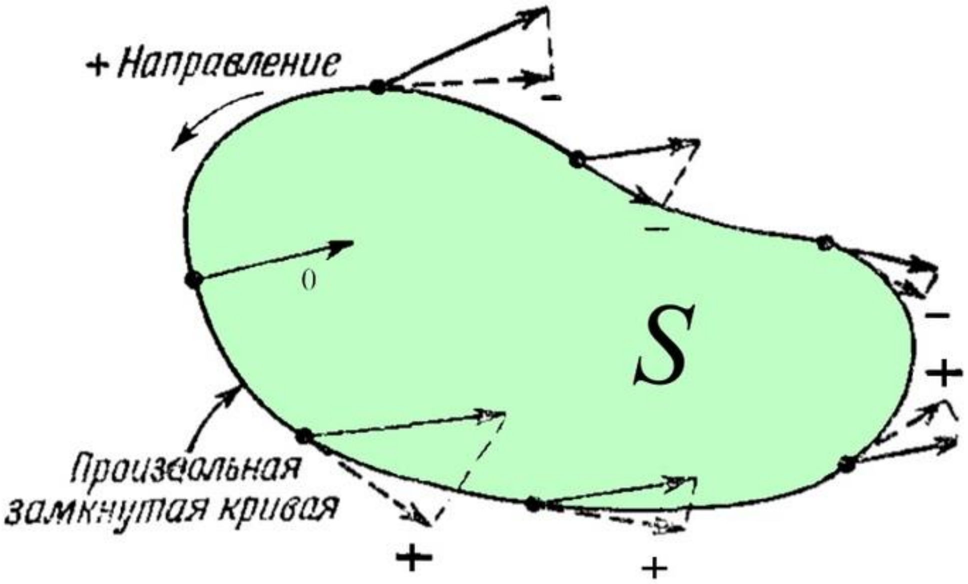


Рисунок 1.24

Виберемо в охоплюваній області точку, і будемо стягувати навколо неї замкнуті трубки струму, що постійно зменшуються, обчислюючи недоротори. Перейшовши до межі, ми отримаємо… Ротор? Ні, краще – проекцію ротора на нормаль до площини трубки (ротор – вектор).

Нормаль - одиничний вектор, перпендикулярний до площини трубки (при вибраному напрямку обходу спрямована нормаль на нас).

Далі по-різному нахилятимемо майданчики і обчислюватимемо проекції ротора. Зрештою, знайдеться такий напрямок, коли проекція ротора стане максимальною. Це і буде напрямом ротора, а проекція, що обчислюється, — модулем ротора. Описане вище визначення називається **інваріантним визначенням ротора** .

Зафіксуємо наше досягнення. **Ротор - напрям найкращого обертання векторного поля в цій точці. Модуль ротора показує, наскільки активно циркулює поле у малій області навколо точки.**

Покажемо з прикладу. Ви закручуєте шуруп за допомогою шуруповерта. Вектор поле — швидкість руху різних точок механізму. Саморіз (чорна стрілочка) показує напрямок ротора, а швидкість входження пропорційна модулю ротора.

Рисунок 1.25

Отже, ротор векторного поля **A** , обчислений заданій точці, показує, наскільки у цій точці поле **A** закручено **.** *Ротор - міра завихрення* . Перейдемо до прикладів використання ротора у рівняннях фізики.

По-перше, ротор поля швидкостей точок твердого тіла дорівнює мінус двом кутовим швидкостям цього тіла. Ви, зрозуміло, вже про це знаєте, адже ви прочитали приклад, що ми порадили

https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0).

По-друге, повернемося до нашої електродинаміки. Ми вже обговорили два рівняння, що входять до четвірки рівнянь Максвелла, в яких використовується дивергенція. Виявляється, два рівняння, що залишилися, говорять про *завихрення* електричного і магнітного полів.