Лекція №12

Розділ 2. Етапи побудови математичної моделі.

Практичне використання побудованої моделі та аналіз результатів моделювання

Дескриптивні моделі, розглянуті в цьому розділі, призначені для опису досліджуваних параметрів деякого явища або процесу, а також вивчення закономірностей зміни цих параметрів. Ці моделі можуть використовуватися

- для вивчення властивостей та особливостей поведінки досліджуваного об'єкта при різних поєднаннях вихідних даних та при різних режимах;
- як моделюючі блоки в різних системах автоматизованого проектування (САПР) та управління (АСУ);
- при побудові оптимізаційних моделей та моделей-імітаторів складних систем та комплексів.

Моделі, що розробляються для дослідницьких цілей, зазвичай не доводяться до рівня програмних комплексів, призначених для передачі стороннім користувачам. Тому час їх існування обмежений часом виконання досліджень за відповідним напрямом. Ці моделі відрізняє пошуковий характер, застосування нових обчислювальних процедур та алгоритмів, нерозвинений програмний інтерфейс. Моделі та побудовані на їх основі програмні комплекси, призначені для передачі стороннім користувачам або для комерційного розповсюдження, мають розвинений дружній інтерфейс, потужні пре- та постпроцесори. Дані моделі будуються, як правило, на апробованих і добре зарекомендували себе постановках і обчислювальних процедурах. Програмні комплекси мають докладні та якісно складені описи та посібники для користувача, з усіх незрозумілих питань фірма-виробник проводить консультації. Однак слід пам'ятати, що такі комерційні моделі призначені лише для вирішення чітко обумовленого класу завдань, як правило, не мають можливостей щодо модернізації та вдосконалення, прив'язані до певного класу обчислювальних пристроїв та периферійного обладнання. Так, користувач немає можливості самостійно розширювати бібліотеку використовуваних чисельних методів чи змінювати систему вихідних гіпотез.

Незалежно від сфери застосування розробленої моделі група розробників має провести якісний і кількісний аналіз результатів моделювання. Подібний аналіз може переслідувати кілька цілей

- Працюючи з моделлю, розробники стають фахівцями у сфері знань, що з об'єктом моделювання. Вони починають досить добре представляти властивості об'єкта, пророкувати і пояснювати його поведінку, у певному сенсі вони можуть навіть уявляти себе як об'єкт моделювання. Тому всебічний аналіз результатів моделювання може дозволити виконати модифікацію об'єкта, що розглядається, знайти його оптимальні характеристики або, принаймні, найкращим чином враховувати його поведінку та властивості.
- Якісний та кількісний аналіз результатів моделювання дозволяє позначити сферу застосування моделі, що особливо важливо у разі використання моделей для систем автоматичного керування.
- Подібний аналіз дозволить перевірити обґрунтованість гіпотез, прийнятих на етапі математичної постановки, оцінити можливість спрощення моделі з метою підвищення її ефективності за збереження необхідної точності.
- Нарешті, виконаний аналіз може показати, у якому напрямі слід розвивати модель надалі.

Приклад

Аналіз результатів вирішення завдання про баскетболіста

Співвідношення (2.10)-(2.12) представляють аналітичне рішення задачі про баскетболіст. Якщо залежність для координати y(t) підставити x(t), то отримаємо рівняння параболи, що описує траєкторію м'яча. Прирівнюючи нулю ліву частину у співвідношенні для y(t), визначаємо час польоту м'яча на дальність L

$$T = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha_0 . \qquad (2.13)$$

Найвищої точки траєкторії м'яч досягає у момент T/2. При цьому максимальна висота м'яча (висота траєкторії) дорівнює

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin\alpha_0 . \qquad (2.14)$$

Аналіз співвідношення (2.11) дозволяє зробити висновок, що максимальна дальність кидка досягається при куті кидання в 45 градусів і дорівнює

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (2.15)$$

Задамо в (2.12) точність □=0 і з отриманого рівняння знайдемо початкову швидкість м'яча при куті кидання в 45 градусів, що забезпечує "абсолютну" точність

$$v_{45}^2 = g\,x_k. \qquad (2.16)$$

Запишемо співвідношення для дальності та точності кидка у безрозмірному вигляді. Відносну дальність l кидка визначимо як відношення дальності кидка до максимальної дальності

$$l = \frac{L}{L_{\max}} = \sin\ 2\alpha_0 \le 1. \qquad (2.17)$$

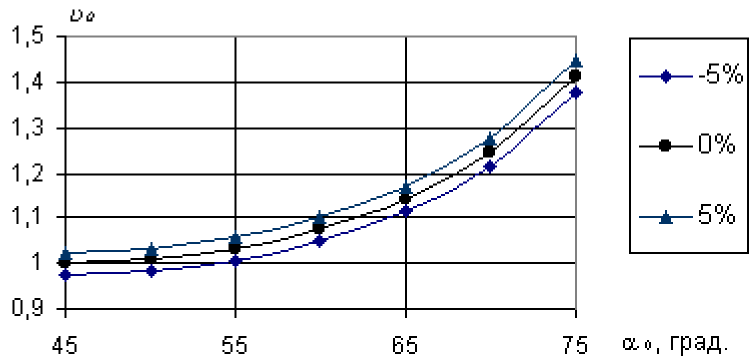
Відносну точність □ введемо як відношення відхилення □ до відстані до центру кошика

$$\delta = \frac{\Delta}{x_k} = \frac{L}{x_k} - 1 = \frac{v_0^2}{g\,x_k}\sin\ 2\alpha_0 - 1 = \left(\frac{v_0}{v_{45}}\right)^2 \sin\ 2\alpha_0 - 1 = \tilde{v}_0^2 \sin\ 2\alpha_0 - 1, \qquad (2.18)$$

де $\tilde{v}_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{g\,x_k}} > 0$ - Відносна початкова швидкість м'яча.

Подання роздільних співвідношень моделі в безрозмірному вигляді зручніше для аналізу. Зі співвідношення (2.18) видно, що задану величину відносної точності кидка можна отримати при двох значеннях кута кидання, що забезпечують настильну (при $0 < 45^0$) і навісну (при $\alpha_0 > 45^0$) траєкторії руху м'яча. При $\alpha_0 = 45^0$ ці траєкторії збігаються. Для забезпечення однакової точності для навісної та настильної траєкторії початкові швидкості м'яча повинні бути однаковими. З точки зору влучення м'яча в кільце навісна траєкторія є кращою порівняно з настильною, тому що навіть при ударі м'яча в кільце ймовірність влучення в кошик у цьому випадку вище. Інакше висловлюючись, допуск відхилення траєкторії м'яча від центру кільця для навісної траєкторії більше, ніж настильной. Тому настильні траєкторії можна виключити з подальшого розгляду менш вигідні. Для навісної траєкторії в першому наближенні можна прийняти, що м'яч потрапляє в кільце, якщо відхилення траєкторії від центру кільця не перевищує половини радіусу м'яча.

Задаючись величиною відносної точності та позначаючи, із співвідношення (2.18) можна отримати оцінку для розкиду відносної початкової швидкості



$$K_\alpha(1-\delta) \le \upsilon_0^2 \le K_\alpha(1+\delta), \quad (2.19)$$

де

$K_\alpha = 1/\sin 2\alpha_0 \ge 1$ - Коефіцієнт кута кидання.

Рис. 2.1. Залежність $\upsilon_0(\alpha_0)$ за відносної точності δ = 5%

Враховуючи, що при відхиленні α_0 від 45^0 $K\alpha$ (2.19) збільшується, можна зробити висновок, що при цьому допуск на розкид значень початкової швидкості при фіксованому значенні α_0 також збільшуватиметься. Правда, при цьому в стільки ж разів зростає і сама величина відносної початкової швидкості кидка. Наприклад, при $\alpha_0 = 75^0$ відносна початкова швидкість збільшиться в $\sqrt{2}$ раз у порівнянні зі значенням швидкості при $\alpha_0 = 45^0$. Однак і допустима величина розкиду швидкості також збільшиться в $\sqrt{2}$ разів. З іншого боку, при фіксованому значенні початкової швидкості та точності кидка, допустимий інтервал розкидання значень кута кидання α_0 максимальний (близько 100 при δ = 5%) для $\alpha_0 = 1$ і звужується зі збільшенням υ_0 (всього 1,70 при $\upsilon_0 = 1,4$). Ця обставина дозволяє зробити висновок, що кидки під кутом, близьким до 45^0, кращі, ніж кидки при великих значеннях кута.

На закінчення оцінимо параметри кидка для реальних розмірів, обумовлених у міжнародних правилах для баскетболу. Відповідно до прийнятих у баскетболі правил довжина кола м'яча може змінюватися від 0,749 до 0,780 м, що відповідає зміні радіусу м'яча від 0,119 до 0,124 м. Маса м'яча повинна лежати в межах від 0,567 до 0,650 кг. Приймемо для визначеності радіус м'яча рівним R=0,12 м, а масу м'яча m=0,6 кг. Внутрішній радіус кільця кошика дорівнює rk=0,225 м. Відповідно до висловлених раніше припущень про умови влучення м'яча в кошик допустиме відхилення траєкторії м'яча від центру кошика становитиме Δ_{max}=rk-R/2 = 0,165 м.

Відстань від лінії штрафних кидків до центру кошики дорівнює 4,225 м. Приймаючи цю величину як xk, можна визначити значення граничної відносної точності кидка $\delta_{max}=\Delta_{max}/x_k=0{,}039$ або 3,9%. Використовуючи співвідношення (2.19) та знайдену величину граничної відносної точності кидка, можна оцінити початкову швидкість м'яча при штрафному кидку та допустимий інтервал її зміни при куті кидання 45^0: $v_0=6{,}44\pm0{,}25$ м/с.

Цікаво також виконати оцінку параметрів "трьохочкового" кидка, який виконується через лінію, розташовану на відстані 6,25 м від центру кільця кошика. Гранична відносна точність кидка у разі трохи більше 2,64%. Величина початкової швидкості при куті кидання 45^0 дорівнює відповідно $v_0=7{,}83\pm0{,}21$ м/с.

У табл. 2.1 для кута кидання 45^0 представлені параметри кидка в залежності від відстані до кільця. З наведених результатів наочно видно, що зі збільшенням дальності кидка на 10 м початкова швидкість кидка зростає більш ніж 3 разу. При цьому допустиме відхилення у значенні початкової швидкості зменшується більш ніж у 3 рази.

Таблиця 2.1.

x_k, м	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**
δ, %	16,5	5,5	3,3	2,3	1,8	1,5
v_0, м/с	3,13	5,42	7,00	8,29	9,40	10,39
$\pm\Delta v$, м/с	0,52	0,30	0,23	0,20	0,17	0,16